

---

# **Beschreibung und Bewertung der Unsicherheit in der Ermittlung der Stellkräfte und -wege von piezoelektrischen Stapelaktuatoren in aktiven lasttragenden Systemen**

Vom Fachbereich Maschinenbau  
an der Technischen Universität Darmstadt  
zur Erlangung des akademischen Grades  
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigte

## **Dissertation**

vorgelegt von  
**Dipl.-Ing. Serge Parfait Ondoua Ebengué**  
aus Duala/Kamerun

1. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Tobias Melz
2. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Stefan Rinderknecht

Tag der Einreichung: 26. Januar 2016  
Tag der mündlichen Prüfung: 13. April 2016

Darmstadt 2016

Beschreibung und Bewertung der Unsicherheit in der Ermittlung der Stellkräfte und -wege von piezoelektrischen Stapelaktuatoren in aktiven lasttragenden Systemen

Description and assessment of uncertainty in the calculation of the mechanical forces and strokes of piezoelectric stack actuators in active load-carrying systems

Genehmigte Dissertation von Dipl.-Ing. Serge Parfait Ondoua Ebengué aus Duala/Kamerun

1. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Tobias Melz
2. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Stefan Rinderknecht

Tag der Einreichung: 26. Januar 2016

Tag der Prüfung: 13. April 2016

Darmstadt 2016 — D 17

Bitte zitieren Sie dieses Dokument als:

URN: [urn:nbn:de:tuda-tuprints-56757](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:tuda-tuprints-56757)

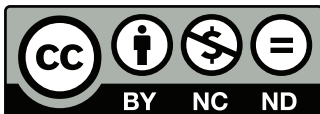
URL: <http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/5675>

Dieses Dokument wird bereitgestellt von tuprints,

E-Publishing-Service der TU Darmstadt

<http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de>

[tuprints@ulb.tu-darmstadt.de](mailto:tuprints@ulb.tu-darmstadt.de)



Die Veröffentlichung steht unter folgender Creative Commons Lizenz:

Namensnennung – Keine kommerzielle Nutzung – Keine Bearbeitung 4.0

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

---

# Kurzfassung

Ein Ansatz aus dem von der DFG geförderten Sonderforschungsbereich SFB 805 „Beherrschung von Unsicherheit in lasttragenden Systemen des Maschinenbaus“ an der Technischen Universität Darmstadt beschreibt und bewertet Unsicherheit und bietet Lösungsansätze zur Beherrschung von Unsicherheit. Die vorliegende Arbeit stellt eine Erprobung dieses Ansatzes zur *Beschreibung* und *Bewertung* von Eigenschaftsstreuung als Unsicherheit in der rechnerischen Ermittlung der Stellkräfte und -wege bzw. der Arbeitspunkte eines piezoelektrischen Stapelaktuators mit seinem Arbeitsdiagramm vor. Als Beispielsystem dient ein aktives System, in dem ein piezoelektrischer Stapelaktuator eine laterale aktive Kraft in einen Balken einleitet.

Die Beschreibung der Streuungen in den Aktuator- und Balkeneigenschaften im Arbeitsdiagramm und die numerische Bewertung ihrer Einflüsse auf die nominalen Arbeitspunkte mit Worst-Case Analysen und Monte Carlo-Simulationen liefern eine *Unsicherheitsregion* um jeden nominalen Arbeitspunkt und die darin vorkommenden *Verteilungen* der Arbeitspunkte. Jede *Unsicherheitsregion* zeigt mit zunehmender mechanischer Vorspannkraft und elektrischer Betriebsspannung am Stapelaktuator einen linearen und nichtlinearen steigenden Verlauf.

Die Arbeitspunkte mehrerer baugleicher Stapelaktuatoren und Balken werden in einem experimentellen System für quasistatische und dynamische elektrische Betriebsspannungen gemessen, um die Ergebnisse der Worst-Case Analysen und Monte Carlo-Simulationen zu validieren. Die gemessenen Stellkräfte und -wege sind aufgrund von Faktoren wie Nichtlinearitäten im Werkstoff der Aktuatoren, Einfluss der mechanischen Vorspannkraft auf die Steifigkeit eines Stapelaktuators und endliche Steifigkeit des experimentellen Systems bis zu 33 % und 35 % geringer als ihre angenommene Werte. Eine Modellanpassung des Arbeitsdiagramms mit mehrdimensionalen Regressionen wird vorgestellt, um eine Überschätzung der Stellkräfte und -wege eines Stapelaktuators zu vermeiden.

Die erzielten numerischen und experimentellen Ergebnisse zeigen das Potential des neuen Ansatzes vom SFB 805, die Variationen in den Stellkräften und -wegen piezoelektrischer Stapelaktuatoren aufgrund von Eigenschaftsstreuung zu beschreiben und zu bewerten.

---

---

# Abstract

The approach of the Collaborative Research Centre CRC 805 – Control of Uncertainty in Load-Carrying Systems in Mechanical Engineering – of the Technische Universität Darmstadt describes and assesses uncertainty, and develops new technologies and methods to control uncertainty. In this work, the CRC 805 approach is used to describe and assess the scatter in the properties of a piezoelectric stack actuator and the mechanical structure to be actuated, e. g. the blocking force and the structure stiffness, as an uncertainty in the numerical evaluation of the stack actuator's mechanical forces and strokes with its working diagram. An active system with a beam that is laterally loaded by an active force from a single piezoelectric stack actuator was taken as a case of study.

The description of the assumed scatter in the actuator's and beam's properties within the working diagram and the numerical assessment of their influences on the actuator's mechanical forces and strokes by means of worst-case analyses and Monte Carlo-simulations showed an uncertainty region around each nominal operating point and the distribution of potential operating points within. Any uncertainty region showed respectively a linear and nonlinear increase together with a growing mechanical preload and electric voltage on the stack actuator.

The operating points of identical stack actuators connected with beams were measured in a test rig of the active system for quasistatic and dynamic electric voltages in order to validate the results of the worst-case analyses and Monte Carlo-simulations. Additional factors like nonlinearities in the piezoelectric material of the stack actuators, the influence of mechanical preload on the actuator stiffness and the finite stiffness of the test rig induce that the measured forces and strokes are up to 33% and 35% smaller than their assumed values from the working diagram. A model update of the working diagram with multidimensional regressions is performed to avoid an overestimation of the actuator's forces and strokes.

The numerical and experimental results presented in this dissertation show the potential of the CRC 805 approach in the description and assessment of the variations in the mechanical forces and strokes of a stack actuator caused by scatter in the actuator's properties and those of the mechanical structure to be actuated.

---

---

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1      | Motivation und Ziele der Arbeit . . . . .                           | 1         |
| 1.2      | Stand der Wissenschaft . . . . .                                    | 3         |
| 1.3      | Aufbau der Arbeit . . . . .   | 8         |
| <b>2</b> | <b>Das Arbeitsdiagramm eines piezoelektrischen Stapelaktuators</b>  | <b>10</b> |
| 2.1      | Beschreibung des Arbeitsdiagramms . . . . .                         | 10        |
| 2.2      | Aktive Stabilisierung eines knickgefährdeten Balkens . . . . .      | 15        |
| 2.3      | Beschreibung des untersuchten aktiven Systems . . . . .             | 19        |
| 2.3.1    | Anwendung des Arbeitsdiagramms . . . . .                            | 21        |
| 2.3.2    | Relevante Aktuator- und Balkeneigenschaften . . . . .               | 23        |
| <b>3</b> | <b>Ansatz des Sonderforschungsbereichs 805</b>                      | <b>24</b> |
| 3.1      | Grundlagen des Ansatzes . . . . .                                   | 24        |
| 3.1.1    | Arbeitshypothese zur Unsicherheit . . . . .                         | 24        |
| 3.1.2    | Unsicherheitsmodell . . . . .                                       | 25        |
| 3.2      | Beschreibung von Unsicherheit . . . . .                             | 26        |
| 3.3      | Bewertung von Unsicherheit . . . . .                                | 27        |
| 3.4      | Lösungsansätze zur Beherrschung von Unsicherheit . . . . .          | 28        |
| <b>4</b> | <b>Beschreibung und numerische Bewertung der Unsicherheit</b>       | <b>29</b> |
| 4.1      | Beschreibung der angenommenen Unsicherheit . . . . .                | 29        |
| 4.2      | Nominale Arbeitspunkte des Stapelaktuators . . . . .                | 33        |
| 4.3      | Numerische Bewertung mit Worst-Case Analysen . . . . .              | 34        |
| 4.3.1    | Grenzen der Kraft-Weg-Kennlinien im Arbeitsdiagramm . . . . .       | 35        |
| 4.3.2    | Unsicherheitsregion im Arbeitsdiagramm . . . . .                    | 37        |
| 4.3.3    | Entwicklung der Unsicherheitsregionen . . . . .                     | 41        |
| 4.3.4    | Angenommene elliptische Unsicherheitsregionen . . . . .             | 43        |
| 4.4      | Numerische Bewertung mit Monte Carlo-Simulationen . . . . .         | 45        |
| 4.4.1    | Stichprobengenerierung . . . . .                                    | 45        |
| 4.4.2    | Deterministische Berechnungen . . . . .                             | 48        |
| 4.4.3    | Statistische Auswertung . . . . .                                   | 49        |
| 4.5      | Zusammenfassung und Diskussion der numerischen Ergebnisse . . . . . | 56        |

---

|  |            |
|--|------------|
| <b>5 Experimentelle Untersuchungen</b>                                 | <b>59</b>  |
| 5.1 Beschreibung des experimentellen aktiven Systems . . . . .         | 59         |
| 5.1.1 Versuchsparameter im experimentellen aktiven System . . . .      | 62         |
| 5.1.2 Ermittlung der experimentellen Arbeitspunkte . . . . .           | 64         |
| 5.2 Beschreibung der Unsicherheit im experimentellen aktiven System .  | 70         |
| 5.2.1 Gemessene Aktuator- und Balkeneigenschaften . . . . .            | 70         |
| 5.2.2 Messunsicherheit in den Kraft- und Wegmesssystemen . . . .       | 73         |
| 5.3 Bewertung der Unsicherheit im experimentellen aktiven System . . . | 76         |
| 5.3.1 Vergleich der nominalen und experimentellen Arbeitspunkte .      | 76         |
| 5.3.2 Experimentelle Unsicherheitsregionen . . . . .                   | 82         |
| 5.3.3 Validierung der Ergebnisse aus den Monte Carlo-Simulationen      | 86         |
| 5.4 Fazit . . . . .  | 87         |
| <b>6 Modellanpassung des deterministischen Arbeitsdiagramms</b>        | <b>89</b>  |
| 6.1 Ermittlung der Regressionsfunktionen . . . . .                     | 89         |
| 6.1.1 Koeffizienten der Regressionsfunktionen . . . . .                | 90         |
| 6.1.2 Güte einer Regressionsfunktion . . . . .                         | 91         |
| 6.2 Ermittlung der angepassten Arbeitspunkte . . . . .                 | 95         |
| 6.3 Zusammenfassung und Diskussion der Modellanpassung . . . . .       | 98         |
| <b>7 Zusammenfassung und Ausblick</b>                                  | <b>100</b> |
| <b>Anhang</b>  | <b>102</b> |
| <b>Literaturverzeichnis</b>  | <b>110</b> |
| <b>Abkürzungs- und Symbolverzeichnis</b>                               | <b>120</b> |
| <b>Abbildungsverzeichnis</b>   | <b>123</b> |
| <b>Tabellenverzeichnis</b>   | <b>125</b> |
| <b>Danksagung</b>  | <b>126</b> |

---

# 1 Einleitung

Diese Arbeit entstand im Rahmen des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG geförderten Sonderforschungsbereichs SFB 805 „*Beherrschung von Unsicherheit in den lasttragenden Systemen des Maschinenbaus*“. Unsicherheit in der Ermittlung der Stellkräfte und -wege eines piezoelektrischen Stapelaktuators in Verbindung mit einem passiven Balken in einem aktiven lasttragenden System wird mit dem neuen Ansatz des Sonderforschungsbereichs SFB 805 beschrieben und bewertet. Die mechanischen Stellkräfte und -wege eines Stapelaktuators werden mit seinem Arbeitsdiagramm abgeschätzt. Die betrachtete Unsicherheit resultiert aus Streuungen in den Eigenschaften eines piezoelektrischen Stapelaktuators wie Blockierkraft, maximaler freier Stellweg und maximale zulässige Betriebsspannung, in den Eigenschaften des passiven Balkens wie Länge, Breite und Dicke und in der mechanischen Vorspannkraft zwischen dem Stapelaktuator und Balken. Abschnitt 1.1 stellt die Motivation und Ziele dieser wissenschaftlichen Arbeit vor. Abschnitt 1.2 stellt den Stand der Wissenschaft zum Thema Unsicherheit in aktiven Systemen und eine Abgrenzung zur vorliegenden Arbeit vor. In Abschnitt 1.3 wird der Aufbau dieser Arbeit vorgestellt.

---

## 1.1 Motivation und Ziele der Arbeit

---

Piezoelektrische Stapelaktuatoren wandeln dank des indirekten piezoelektrischen Effekts elektrische Energie in Form einer elektrischen Betriebsspannung in mechanische Energie in Form von mechanischen Stellkräften und -wegen um [40]. Die Stellkräfte und -wege piezoelektrischer Stapelaktuatoren können in aktiven lasttragenden Systemen z. B. zur Schwingungsreduktion und/oder zur Stabilisierung in/von mechanischen Strukturen wie die aktive Stabilisierung eines knickgefährdeten geraden Balkens mithilfe eines piezoelektrischen Stapelaktuators [22] eingesetzt werden. Die rechnerische Ermittlung der mechanischen Stellkräfte und -wege piezoelektrischer Stapelaktuatoren ist von zentraler Bedeutung in der Entwicklung aktiver lasttragender Systeme, weil sie z. B. das dynamische Verhalten oder die Stabilität einer mechanischen Struktur gezielt beeinflussen. Ein technisches System, das u. a. aus aktiven und passiven Bauteilen mit sensorischer, aktuatorischer und einer mechanisch stützenden Funktion besteht, wird in dieser Arbeit als ein aktives lasttragendes System bezeichnet [34].

---

Mit dem Arbeitsdiagramm eines piezoelektrischen Stapelaktuators können die Stellkraft und den Stellweg bzw. einen Arbeitspunkt eines Stapelaktuators für eine bestimmte elektrische Betriebsspannung und Steifigkeit der aktiv zu beeinflussenden mechanischen Struktur ermittelt werden. Die mechanischen und elektrischen Eigenschaften eines piezoelektrischen Stapelaktuators wie seine Blockierkraft, sein maximaler freier Stellweg und seine maximale zulässige elektrische Betriebsspannung und die Eigenschaften der mechanischen Struktur wie ihre geometrischen Abmessungen Länge, Breite, Dicke usw. und der Elastizitätsmodul ihres Werkstoffs werden im Arbeitsdiagramm berücksichtigt. Diese Eigenschaften eines piezoelektrischen Stapelaktuators und der von ihm aktiv zu beeinflussenden mechanischen Struktur besitzen in der Regel unterschiedliche Streuungen und sie werden hier als unsichere Eigenschaften bezeichnet. In dieser Arbeit wird die Streuung einer Eigenschaft als eine Abweichung zwischen dem tatsächlichen und dem angenommenen Wert bzw. dem Nominalwert dieser Eigenschaft verstanden. Der Nominalwert einer Eigenschaft bezeichnet in dieser Arbeit einen bestimmten Wert, der mit einer Einheit diese Eigenschaft quantifiziert. Die betrachteten Streuungen in den unsicheren Eigenschaften eines Stapelaktuators und der von ihm zu beeinflussenden mechanischen Struktur werden vor allem durch Toleranzen in der Herstellung beider Systemelemente und/oder durch Unsicherheiten in der Messung der jeweiligen Eigenschaften verursacht. Diese Streuungen bewirken u. a.:

- Eine unsichere Auswahl eines piezoelektrischen Stapelaktuators aufgrund der Diskrepanzen zwischen den nominalen und den tatsächlichen Werten seiner Eigenschaften.
- Eine unsichere Bewertung der mechanischen Einflüsse eines piezoelektrischen Stapelaktuators auf die aktiv zu beeinflussende Struktur in einem aktiven System, weil z. B. Abweichungen zwischen den berechneten und den tatsächlichen Stellkräften und -wegen vorhanden sind.
- Unerwünschtes Verhalten des gesamten aktiven Systems, weil die Schwingungsberuhigung oder Stabilisierung einer mechanischen Struktur aufgrund niedrigerer Stellkräfte und -wege nicht mehr durchführbar ist.

Folgende Ziele werden in der vorliegenden Arbeit zur Vermeidung der angegebenen Auswirkungen verfolgt:

- Die numerische Ermittlung der Variationen in den Stellkräften und -wegen eines piezoelektrischen Stapelaktuators aufgrund der Streuungen in den unsicheren Eigenschaften des Stapelaktuators und der aktiv zu beeinflussenden mechanischen Struktur



- 
- Die Analyse der Abhängigkeiten zwischen den Variationen in den Stellkräften und -wegen und den Streuungen in den unsicheren Eigenschaften eines Stapelaktuator und der aktiv zu beeinflussenden mechanischen Struktur in einem neuen nichtdeterministischen Arbeitsdiagramm
  - Die experimentelle Validierung der zuvor ermittelten Variationen und Abhängigkeiten durch Messung der Stellkräfte und -wege baugleicher Stapelaktuatoren

Streuungen in den unsicheren Eigenschaften eines Stapelaktuator und einer aktiv zu beeinflussenden mechanischen Struktur in einem aktiven System werden als Unsicherheit in der Anwendung eines Arbeitsdiagramms beschrieben und bewertet, um die benannten Ziele zu erreichen. Bei der Beschreibung der Streuungen in den unsicheren Eigenschaften eines Stapelaktuator und einer aktiv zu beeinflussenden mechanischen Struktur im Arbeitsdiagramm werden Informationen aus Datenblättern und Normen gesammelt. Bei der numerischen Bewertung der Unsicherheit werden nichtdeterministische numerische Simulationsmethoden wie Worst-Case Analysen und Monte Carlo-Simulationen eingesetzt, um Variationen in den numerischen Stellkräften und -wegen aufgrund der unsicheren Eigenschaften zu ermitteln. Die Ergebnisse aus der numerischen Bewertung werden mit experimentellen Versuchen an baugleichen piezoelektrischen Stapelaktuatoren und mechanischen Strukturen mit unterschiedlicher Steifigkeit validiert.

Als Beispielsystem für die Anwendung eines Arbeitsdiagramms dient ein aktives System mit einem passiven Balken, der mit einer lateral angreifenden Kraft eines piezoelektrischen Stapelaktuator beeinflusst wird. Die Betriebsbedingungen des Stapelaktuator und des Balkens wie die maximale elektrische Betriebsspannung, der Angriffspunkt der Aktuatorkraft auf den Balken und die Lagerung des Balkens werden aus dem aktiven Balkensystem in [22] abgeleitet. Im aktiven Balkensystem wird das Ausknicken eines knickgefährdeten Balkens mit einem piezoelektrischen Stapelaktuator aktiv verhindert.

---

## 1.2 Stand der Wissenschaft

---

In diesem Abschnitt wird der Stand der Wissenschaft in der Beschreibung und Bewertung von Unsicherheit in technischen Systemen zusammengefasst. Zunächst werden die wesentlichen Unsicherheitskategorien und die Methoden zu deren Bewertung vorgestellt. Dann werden Arbeiten vorgestellt, in denen die Streuungen in den Eigenschaften von Systemelementen wie ihre Materialeigenschaften und geometrischen Abmessungen als Unsicherheit untersucht worden sind. Eine Abgrenzung dieser Arbeit zum Stand der Wissenschaft wird vorgestellt.

---

Unsicherheit gilt als ein potenzieller Mangel in jeder Simulationsphase eines technischen Systems, der aufgrund von Informations- und/oder Wissensmangel entstanden ist [7, 65]. Das Verhalten eines mechanischen Systems wird aufgrund von Unsicherheit im System und in seiner Umgebung nicht deterministisch, d. h. das Systemverhalten ist nicht eindeutig zu determinieren [65]. Der englische Begriff *Uncertainty Quantification* (UQ) steht für die Wissenschaft die sich mit der Identifizierung, Quantifizierung und Reduzierung von Unsicherheit in Modellen, Experimenten und von ihren Auswirkungen auf ausgewählten Zielgrößen eines technischen Systems beschäftigt [88].

Die Identifizierung und Quantifizierung von Unsicherheit führen zu den beiden Unsicherheitskategorien *aleatorische* und *epistemische Unsicherheit* [7, 65, 88]. *Aleatorische Unsicherheit* gilt als unvermeidbare Unsicherheit, weil sie die inhärente Variation und die Einzigartigkeit eines Systems beschreibt. Sie kann mit den Verteilungsfunktionen der unsicheren Eigenschaften eines Systems oder seiner Umgebung beschrieben so dass sie auch als stochastische Unsicherheit bezeichnet wird [65]. *Epistemische Unsicherheit* gilt als vermeidbare Unsicherheit, die aufgrund von Informations- und Wissensmangel z. B. aufgrund von unvollständigen Messdaten, einer Nichtberücksichtigung von wichtigen Systemparametern in einem mathematischen Modell oder fehlendem Fachwissen entstanden ist. Sie liegt z. B. vor, wenn eine unsichere Systemeigenschaft oder -parameter nur mithilfe von Grenzwerten beschrieben wird [64, 65]. Die Reduzierung von Unsicherheit zielt in der Regel auf eine Überführung von der *epistemischen* zur *aleatorischen Unsicherheit* [88]. Eine klare Abgrenzung zwischen *epistemischer* und *aleatorischer Unsicherheit* ist bei den meisten technischen Systemen nicht gegeben, weil z. B. die Streuungen in den Eigenschaften von Systemelementen eines technischen Systems in Form von Verteilungsfunktionen und Grenzwerten verfügbar sein können.

Weitere Kategorien verknüpfen Unsicherheit mit den unterschiedlichen Aspekten einer numerischen und experimentellen Simulation eines technischen Systems. *Parameterunsicherheit* beschreibt eine Unsicherheit, die mit den Parametern eines numerischen Modells verknüpft ist [97]. Ein *Fehler* beschreibt einen wiederererkennbaren Mangel in der numerischen Simulation eines Systems [30]. *Modellunsicherheit* beschreibt die Genauigkeit mit der ein numerisches Modell die Realität abbildet [97]. *Messunsicherheit* beschreibt Streuungen in den Messergebnissen aus experimentellen Versuchen [2]. Sie wird als ein dem Messergebnis zugeordneter Parameter zur Kennzeichnung seiner Streuung definiert [42].

Parameterunsicherheit kann sowohl der aleatorischen als auch der epistemischen Unsicherheit zugeordnet werden weil die Streuungen in den Parametern eines numerischen Modells mit Verteilungsfunktionen und/oder mit Grenzwerten beschrieben werden können. Diskretisierungs- und Interpolationsfehler sind weder

---

der aleatorischen noch der epistemischen Unsicherheit zuzuordnen. Eine Zuordnung von Modellunsicherheit zur aleatorischen und epistemischen Unsicherheit ist wenig sinnvoll, weil aleatorische und epistemische Unsicherheit, Fehler und Messunsicherheit zu Diskrepanzen zwischen den Ergebnissen einer numerischen und experimentellen Simulation führen. Die Ursachen von Messunsicherheit wie eine unvollständige Definition der Messgröße, eine nicht-repräsentative Stichprobe, Empfindlichkeit der Messinstrumente, menschliche Ablesefehler usw. können der aleatorischen als und/oder der epistemischen Unsicherheit zugeordnet werden [42, 2].

Die Kategorisierung von Unsicherheit wird je nach Aufgabenstellung und vorhandenem Wissensstand der jeweiligen Autoren unterschiedlich vorgenommen. Die Streuungen in den Eigenschaften eines piezoelektrischen Stapelaktuators und einer mechanischen Struktur können der Parameterunsicherheit, der aleatorischen und/oder der epistemischen Unsicherheit zugeordnet werden.

Die Quantifizierung der Auswirkungen von Unsicherheit auf ausgewählten Zielgrößen eines numerischen oder mathematischen Modells erfolgt mit probabilistischen und nichtprobabilistischen Simulationsmethoden.

Probabilistische Simulationsmethoden wie Monte Carlo-Simulationen (MCS) basieren auf der Wahrscheinlichkeitstheorie [19]. MCS bauen auf wiederholte zufällige Berechnungen deterministischer funktionaler Zusammenhänge mit zufälligen und unabhängig voneinander streuenden Eingangsparametern [57, 32] und sie werden auch als Verfahren der Stochastik beschrieben [83]. Die Verteilungsfunktionen der Zielgrößen eines Systems werden in Abhängigkeit der Verteilungsfunktionen der Systemeigenschaften ermittelt (stochastische Unsicherheit) [56, 67, 32].

Nichtprobabilistische Methoden wie Worst-Case Analysen, die Evidenztheorie (Dempster-Shafer Evidence Theory) [13, 86], Möglichkeitstheorie (possibility theory) [39, 90] und die Fuzzy Logik [96, 57] basieren u. a. auf Intervallrechnung [88]. Sie ermöglichen die Ermittlung von Grenzen bzw. Grenzverteilungsfunktionen für die Zielgrößen eines Systems in Abhängigkeit von unvollständigen Informationen über die Systemeigenschaften (epistemische Unsicherheit). Der Rechenaufwand bei probabilistischen Simulationsmethoden ist in der Regel aufgrund der hohen Anzahl an wiederholten deterministischen Berechnungen eines numerischen Modells höher als bei nichtprobabilistischen Simulationsmethoden [18]. Der Einsatz von nichtprobabilistischen Methoden wie Worst-Case Analysen, Intervallanalysen und Möglichkeitstheorie z. B. in der Optimierung von technischen Systemen unter Parameterunsicherheit führt zu komplexen mathematischen Optimierungsaufgaben, die meist nichtlinear sind und mit numerischen Lösungsverfahren wie der Anti-Optimierungsmethode in [29] zu bewältigen sind. [29, 46] zeigen, dass

---

probabilistische und nichtprobabilistische Simulationsmethoden zu vergleichbaren Ergebnissen bei der Optimierung von technischen Systemen führen.

Die Auswahl einer geeigneten Simulationsmethode hängt von den vorhandenen Unsicherheitskategorien, vom numerischen Modell des technischen Systems und vom Untersuchungsziel ab.

In vielen Arbeiten werden die Streuungen in den Eigenschaften eines technischen Systems als Parameterunsicherheit oder epistemische Unsicherheit nach der Vorgehensweise der *Uncertainty Quantification* (UQ) erforscht. Folgende Untersuchungsziele sind in der Mehrheit dieser Arbeiten erkennbar:

- die Optimierung eines technischen Systems mit Parameterunsicherheit in seinen Eigenschaften [3, 30, 5, 46, 52, 29], und
- die Ermittlung der Variationen im Systemverhalten aufgrund von Parameterunsicherheit in den Systemeigenschaften [54, 84, 91, 73, 38, 66, 79, 17].

Die Streuungen in den geometrischen, mechanischen, elektrischen und Materialeigenschaften wie die Länge und die Dicke eines schwingenden Balkens [30], die Rumpflänge und -breite eines Flugzeugs [3], die Masse und der Dämpfungskoeffizient eines Fahrzeugaufbaus [79], die Ladungskonstante und die dielektrische Konstante einer Piezokeramik [91], die Dichte und der Elastizitätsmodul eines viskoelastischen Werkstoffs [17] usw. werden entweder mit Intervallen (*Bounded-But-Unknown Uncertainty* [30]) oder mit Verteilungsfunktionen wie Normal- und Gamma-Verteilungen beschrieben. Probabilistische Simulationsmethoden wie MCS werden häufig eingesetzt, um z. B. die Einflüsse von Parameterunsicherheit auf eine Systemeigenschaft wie die gewonnene elektrische Energie aus einem Energy Harvester System in [30], das Gewicht eines Flugzeugs in [3] und der Amplitudengang eines Fahrzeugaufbaus in [79] zu ermitteln. In den meisten Studien berühren die Intervalle und die Verteilungsfunktionen zur Beschreibung der Streuungen in den Systemeigenschaften und -parametern auf Annahmen der jeweiligen Autoren. Bei den numerischen Modellen der untersuchten Systeme handelt es sich oft um bekannte analytische Beispiele, die z. B. einen Vergleich zwischen einer Systemoptimierung mit probabilistischen und nichtprobabilistischen Simulationsmethoden ermöglichen wie Stabwerke mit Parameterunsicherheit in den Querschnitten der Stäbe und in der mechanischen Belastung in [29]. Eine Validierung der Ergebnisse aus numerischen Simulationen wie Monte Carlo-Simulationen oder Worst-Case Analysen mit experimentellen Versuchen wird nur in wenigen Studien durchgeführt [62, 12]. Eine Übertragbarkeit der Ergebnisse aus den zitierten Studien auf die hier untersuchte *Parameterunsicherheit* bzw. *epistemische Unsicherheit* in der Anwendung eines Arbeitsdiagramms ist nicht möglich, weil die betrachteten Eigenschaften und die getroffenen Annahmen

---

über ihre Streuungen für die untersuchten piezoelektrischen Stapelaktuatoren und mechanischen Strukturen nicht gelten.

In [33] wird der Ansatz des SFB 805 zur ganzheitlichen Beherrschung von Unsicherheit in den lasttragenden Systemen des Maschinenbaus vorgestellt. Unsicherheit soll entlang des kompletten Lebenszyklus' eines lasttragenden Systems, d. h. von der Entwicklung über die Produktion bis zur Nutzung, beherrscht werden. Diese Beherrschung von Unsicherheit sieht die Beschreibung, die Bewertung und die Lösung/Reduktion/Vermeidung von Unsicherheit vor. Zu diesem Zweck wird Unsicherheit einem bestimmten Prozess zugeordnet und es wird postuliert, dass „*Unsicherheit aufträte, wenn die Prozesseigenschaften eines Systems nicht oder nur eingeschränkt determiniert werden können*“. Mit der Verknüpfung zwischen Unsicherheit und einem Prozess in der Entwicklung, Produktion und Nutzung eines lasttragenden Systems wird u. a. die Fortpflanzung von Unsicherheit über den gesamten Lebenszyklus eines Systems einheitlich dargestellt. In dieser Arbeit gilt die Ermittlung der Stellkräfte und -wege eines Stapelaktuators mit seinem Arbeitsdiagramm als ein Prozess in der Entwicklung eines aktiven Systems, der von den Streuungen in den unsicheren Eigenschaften eines Stapelaktuators und des mit ihm verbundenen Balkens beeinflusst wird. Der Ansatz des SFB 805 wird in Kapitel 3 vorgestellt.

#### *Abgrenzung der vorliegenden Arbeit zum vorgestellten Stand der Wissenschaft*

Obwohl piezoelektrische Stapelaktuatoren häufig in aktiven Systemen eingesetzt werden und das Vorhandensein von Streuungen in ihren Eigenschaften wie die Blockierkraft allgemein bekannt ist, haben sich wenige Arbeiten damit beschäftigt, diese Streuungen als Unsicherheit qualitativ und quantitativ zu beschreiben und zu bewerten. Die Modellierung von Nichtlinearitäten, des Hysterese- und temperaturabhängigen Verhaltens piezoelektrischer Stapelaktuatoren [27, 31, 1, 36, 93, 45, 37, 49, 92] und die Entwicklung robuster Regelungen für aktive Systeme mit piezoelektrischen Stapelaktuatoren [44, 53, 87, 89, 51] wurden in vielen Studien erforscht. Die vorliegende Arbeit unterscheidet sich von den vorgestellten Arbeiten im Stand der Wissenschaft durch die Nutzung des Ansatzes vom SFB 805 zur Beschreibung und Bewertung von Unsicherheit in der Anwendung des Arbeitsdiagramms eines piezoelektrischen Stapelaktuators und, durch die experimentelle Validierung der numerischen Ergebnisse.

Die Beschreibung und Bewertung von Unsicherheit in der Anwendung eines Arbeitsdiagramms wird an einem realen aktiven System bestehend u. a. aus einem piezoelektrischen Stapelaktuator und einem Balken durchgeführt. Die Wirkung der Streuungen in den unsicheren Eigenschaften des untersuchten Stapelaktuators und des Balkens auf die Stellkräfte und -wege des Stapelaktuators im aktiven System werden zunächst numerisch mit Worst-Case Analysen und Monte

---

Carlo-Simulationen quantifiziert. Dann werden die tatsächlichen Stellkräfte und -wege von baugleichen Stapelaktuatoren in einem experimentellen Versuchsstand gemessen, um die numerisch abgeschätzte Wirkung experimentell zu validieren. Zum Schluss wird das Arbeitsdiagramm des Stapelaktuator an die gemessenen Stellkräfte und -wege mit mehrdimensionalen Regressionen so angepasst, dass die Anwendung des Arbeitsdiagramms zu realitätsnahen Stellkräften und -wegen eines Stapelaktuator im untersuchten aktiven System führt.

Das Arbeitsdiagramm wird vom deterministischen zum nichtdeterministischen Arbeitsdiagramm erweitert. Das deterministische Arbeitsdiagramm liefert eindeutige Werte für die Stellkraft und den Stellweg, weil die Nominalwerte der unsicheren Eigenschaften eines Stapelaktuator und der mit ihm verbundenen Struktur ohne Streuungen berücksichtigt werden. Das nichtdeterministische Arbeitsdiagramm liefert die Variationen der Stellkräfte und -wege, die von den Streuungen in den unsicheren Eigenschaften eines Stapelaktuator und der mit ihm verbundenen Struktur verursacht werden. Der Aufbau der vorliegenden Arbeit wird im nächsten Abschnitt erläutert.

---

### 1.3 Aufbau der Arbeit


---

Nach einer Einführung in Kapitel 1 stellt Kapitel 2 das deterministische Arbeitsdiagramm eines Stapelaktuator und das untersuchte aktive System mit einem piezoelektrischen Stapelaktuator in Verbindung mit einem passiven Balken vor. Die unsicheren Eigenschaften des Stapelaktuator und des Balkens im aktiven System werden identifiziert.

Kapitel 3 stellt den Ansatz zur Beherrschung von Unsicherheit in lasttragenden Systemen aus dem SFB 805 vor. Die Grundlagen des SFB-Ansatzes bestehen u. a. aus einer Arbeitshypothese zum Begriff „Unsicherheit“ und einem Unsicherheitsmodell mit den Unsicherheitskategorien *Unwissen*, *Ungewissheit* und *stochastische Unsicherheit*.

Kapitel 4 zeigt die Beschreibung und die numerische Bewertung von *Unsicherheit* in der Anwendung des Arbeitsdiagramms im aktiven System aus dem Kapitel 2. Die angenommenen Streuungen in den unsicheren Eigenschaften des Stapelaktuator und des Balkens im aktiven System werden beschrieben und in den Unsicherheitskategorien des SFB 805 klassifiziert. Die Einflüsse dieser Streuungen auf die numerischen Stellkräfte und -wege bzw. auf die nominalen Arbeitspunkte des Stapelaktuator werden mit Worst-Case Analysen und Monte Carlo-Simulationen analytisch und numerisch bewertet.

Kapitel 5 zeigt die experimentelle Validierung der numerischen Ergebnisse aus dem vorherigen Kapitel 4. Ein experimenteller Aufbau des aktiven Systems



---

in Kapitel 2 zur Messung der Stellkräfte und -wege mehrerer baugleichen Stapelaktuatoren in Verbindung mit unterschiedlichen Balken wird vorgestellt. Die Streuungen in den gemessenen Eigenschaften der erprobten Stapelaktuatoren und Balken, in den gemessenen Stellkräften und -wegen werden mit ihren angenommenen und numerisch ermittelten Werten in Kapitel 4 verglichen.

In Kapitel 6 wird das deterministische Arbeitsdiagramm in Kapitel 2 an die Messergebnisse in Kapitel 5 angepasst. Mehrdimensionale Regressionen über die Abweichungen zwischen den numerischen und gemessenen Stellkräften und -wegen werden bei dieser Anpassung verwendet. Das angepasste Arbeitsdiagramm ermöglicht die Ermittlung realistischerer Stellkräfte und -wege.

Kapitel 7 fasst die Ergebnisse der vorliegenden wissenschaftlichen Arbeit zusammen und gibt einen Ausblick über zukünftige wissenschaftlichen Fragestellungen.

---

## 2 Das Arbeitsdiagramm eines piezoelektrischen Stapelaktuators

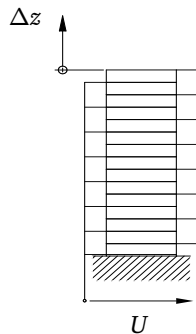
In Kapitel 2 wird zunächst das mathematische Modell des Arbeitsdiagramms eines piezoelektrischen Stapelaktuators vorgestellt. Anschließend wird das aktive Balkensystem in [20] vorgestellt, in dem ein knickgefährdeten Balken mithilfe einer lateralen Kraft aus einem piezoelektrischen Stapelaktuator aktiv stabilisiert wird. Aus dem aktiven Balkensystem in [20] wird das in dieser Arbeit untersuchte aktive System abgeleitet. Schließlich wird das Arbeitsdiagramm auf das untersuchte aktive System angewendet und die relevanten unsicheren Eigenschaften des Stapelaktuators und des Balkens werden identifiziert.

---

### 2.1 Beschreibung des Arbeitsdiagramms

---

Abbildung 2.1 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines piezoelektrischen Stapelaktuators, der aus mehreren piezoelektrischen Einzelschichten mit je einer Elektrodenschicht zwischen zwei benachbarten Einzelschichten besteht.



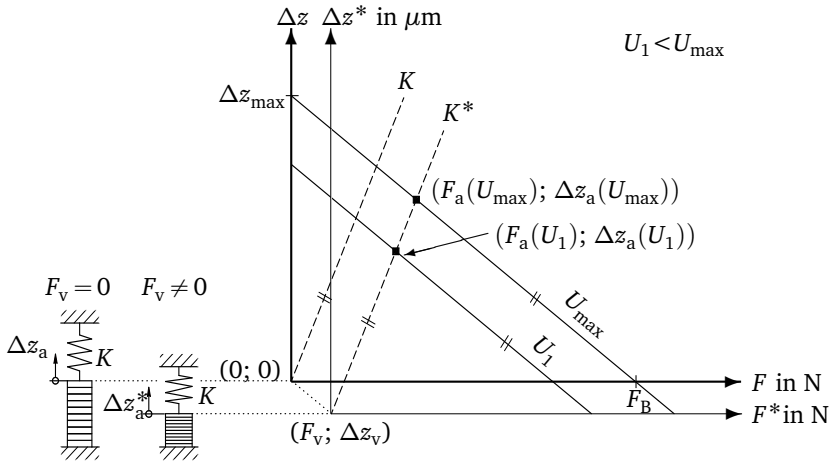
**Abbildung 2.1:** Prinzipieller Aufbau eines piezoelektrischen Stapelaktuators

Diese Einzelschichten (mit Höhenabmessungen im Bereich  $\leq 1$  mm) sind meist aus einer piezoelektrischen Keramik wie PZT, Bleizirkonattitanat- $\text{Pb}(\text{ZrTi})\text{O}_3$ . Sie bewirken aufgrund des indirekten piezoelektrischen Effekts eine mechanische



Verschiebung  $\Delta z$  des Stapelaktuator, sobald eine elektrische Betriebsspannung  $U$  am Stapelaktuator vorliegt [40]. In aktiven Systemen können Stapelaktuatoren gegen eine mechanische Struktur eingespannt werden, so dass sie sich unter einer elektrischen Betriebsspannung ausdehnen und eine Stellkraft in die mechanische Struktur einleiten.

Das Arbeitsdiagramm eines Stapelaktuator ist ein Kraft-Weg-Diagramm, das eine rechnerische Abschätzung der Stellkräfte  $F_a$  und -wege  $\Delta z_a$  eines Stapelaktuator in Verbindung mit einer Struktursteifigkeit  $K$  für eine elektrische Betriebsspannung  $U$  und eine mechanische Vorspannkraft  $F_v$  am Stapelaktuator ermöglicht. Abbildung 2.2 zeigt den Aufbau eines Arbeitsdiagramms mit und ohne mechanische Vorspannkraft  $F_v$  und für die beiden elektrischen Betriebsspannungen  $U_1 < U_{\max}$  [74, 76].



**Abbildung 2.2:** Arbeitsdiagramm eines piezoelektrischen Stapelaktuator mit und ohne externe mechanische Vorspannkraft  $F_v$  am Stapelaktuator

Die nominalen Kraft-Weg-Kennlinien des Stapelaktuator für die elektrischen Betriebsspannungen  $U_1 < U_{\max}$  werden im Arbeitsdiagramm in Abbildung 2.2 dargestellt. Die nominale Kraft-Weg-Kennlinie der mechanischen Feder mit der Steifigkeit  $K$ , die mit dem Stapelaktuator verbunden ist, wird auch in Abbildung 2.2 dargestellt. Die Vorspannkraft  $F_v$  bewirkt eine Verschiebung vom Koordinatenursprung im Arbeitsdiagramm von  $(0; 0)$  zu  $(F_v; \Delta z_v)$ , mit  $\Delta z_v$  als der initiale Stellweg des Stapelaktuator aufgrund der Vorspannkraft  $F_v$ . Die mechanische Vorspannkraft eines Stapelaktuator wird von den Herstellern empfohlen, um

Zugspannungen im Stapelaktuator bei positiven elektrischen Betriebsspannungen zu vermeiden [76, 74, 98]. Für die **nominale Kraft-Weg-Kennlinie des Stapelaktuators** in Abbildung 2.2 gilt

$$\Delta z(F, U) = \Delta z_{\max} \left( -\frac{F}{F_B} + \frac{U}{U_{\max}} \right), \quad (2.1)$$

mit der Blockierkraft bzw. Klemmkraft  $F_B$ , dem maximalen freien Stellweg  $\Delta z_{\max}$  und der maximalen zulässigen elektrischen Betriebsspannung  $U_{\max}$  des Stapelaktuators [71]. Für die **nominale Kraft-Weg-Kennlinie der mechanischen Struktur**, in Abbildung 2.2 eine passive Feder, gilt

$$\begin{cases} \Delta z(F) = \frac{1}{K} F & \text{für } F_v = 0 \\ \Delta z(F) = \frac{1}{K} (F - F_v) + \Delta z_v & \text{für } F_v \neq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

mit der lokalen Steifigkeit  $K$  der Struktur, eine Feder in Abbildung 2.2, und der initialen mechanischen Verschiebung  $\Delta z_v$  des Stapelaktuators aufgrund der Vorspannkraft  $F_v$  nach der Gleichung (2.1)

$$\Delta z_v = \Delta z(F_v, 0) = -\frac{\Delta z_{\max}}{F_B} F_v. \quad (2.3)$$

Die lokale Steifigkeit  $K$  beschreibt das Kraft-Weg-Verhältnis der mechanischen Struktur im Angriffspunkt der Aktuatorkraft  $F_a$ . Ein Schnittpunkt beider Kraft-Weg-Kennlinien des Stapelaktuators und der mechanischen Struktur zeigt einen **nominalen Arbeitspunkt** des Stapelaktuators mit der Stellkraft  $F_a$  und dem Stellweg  $\Delta z_a$  (■ in Abbildung 2.2). In diesem Schnittpunkt gilt

$$\Delta z(F_a, U) = \Delta z(F_a) = \Delta z_a(U).$$

Dies führt zum folgenden Gleichungssystem für die **nominalen Stellkräfte und -wege**,

$$\begin{cases} F_a(U) = \frac{\Delta z_{\max}}{\frac{1}{K} + \frac{\Delta z_{\max}}{F_B}} \left( \frac{U}{U_{\max}} \right) + F_v \\ \Delta z_a(U) = \frac{1}{K} (F_a(U) - F_v) - \frac{\Delta z_{\max}}{F_B} F_v \end{cases}. \quad (2.4)$$

---

Das Gleichungssystem (2.4) zeigt, dass die **nominalen Stellkräfte und -wege**  $F_a$  und  $\Delta z_a$  eines Stapelaktuators von der Blockierkraft  $F_B$ , dem maximalen freien Stellweg  $\Delta z_{\max}$ , der maximalen zulässigen elektrischen Betriebsspannung  $U_{\max}$  des Stapelaktuators, von der mechanischen Vorspannkraft  $F_v$  und der elektrischen Betriebsspannung  $U$  am Stapelaktuator und von der lokalen Steifigkeit  $K$  der mechanischen Struktur abhängig sind. Es beschreibt das deterministische Arbeitsdiagramm, das ohne Unsicherheit deterministische Werte für die Stellkräfte  $F_a$  und -wege  $\Delta z_a$  eines Stapelaktuators liefert.

Die Blockierkraft  $F_B$  bezeichnet die maximal vom Stapelaktuator erzeugbare Kraft, wenn dieser in Verbindung mit einer unendlich steifen Struktursteifigkeit  $K \rightarrow \infty$  mit seiner maximalen zulässigen elektrischen Betriebsspannung  $U_{\max}$  betrieben wird [95]. Sie stellt einen theoretischen Wert dar, weil eine unendlich große Struktursteifigkeit nicht realisierbar ist.

Der maximale freie Stellweg  $\Delta z_{\max}$  bezeichnet den vom Aktuator erzeugbaren Stellweg, wenn dieser frei von jeglicher Struktursteifigkeit mit seiner maximalen zulässigen elektrischen Spannung  $U_{\max}$  betrieben wird [74, 76].

Die maximale zulässige elektrische Betriebsspannung  $U_{\max}$  ist ein vom Hersteller festgelegter Maximalwert, der einen elektrischen Durchschlag eines Stapelaktuators ausschließt.

Die Blockierkraft  $F_B$  und der maximale freie Stellweg  $\Delta z_{\max}$  in Gleichung (2.1) sind mechanischen Eigenschaften eines Stapelaktuators, die für den elektrischen Großsignalbetrieb gelten. Der elektrische Betrieb von Stapelaktuatoren wird in Abhängigkeit der wirkenden elektrischen Betriebsspannung bzw. Feldstärke im Klein- und Großsignalbetrieb unterteilt. Der Kleinsignalbetrieb gilt bei niedrigen elektrischen Betriebsspannungen und Feldstärken im Stapelaktuator ( $\leq 1 \text{ kV/mm}$ ) und der Großsignalbetrieb gilt bei höheren elektrischen Betriebsspannungen und Feldstärken ( $> 1 \dots 2 \text{ kV/mm}$ ). In vielen Fachbüchern wie [50, 81] wird das Arbeitsdiagramm eines Stapelaktuators für den Kleinsignalbetrieb vorgestellt, in dem die Kleinsignalwerte der Blockierkraft und des maximalen freien Stellwegs aus den Materialeigenschaften des PZT-Werkstoffs wie seine Ladungskonstante, aus den geometrischen Abmessungen des Stapelaktuators wie seine Länge, sein Querschnitt und die Dicke der piezokeramischen Einzelschichten und aus der elektrischen Betriebsspannung am Stapelaktuator ermittelt werden können. Die Großsignalwerte der Blockierkraft und des maximalen freien Stellwegs werden aus Messungen gewonnen und sie stimmen in der Regel nicht mit den Kleinsignalwerten überein. Stapelaktuatoren arbeiten meist aufgrund der kleinen Dicken von ihren piezokeramischen Einzelschichten und einer bestmöglichen Ausnutzung ihrer Stellkraft- und Stellwegmöglichkeiten im Großsignalbetrieb [40]. Aus diesen Gründen gilt das Arbeitsdiagramm in Abbildung 2.2 für den

---

Großsignalbetrieb eines Stapelaktuators. Es wird von Aktuatorherstellern [74, 76] und in der Fachliteratur [43, 81] für den Betrieb eines Stapelaktuators mit positiven elektrischen Betriebsspannungen, d. h. für einen unipolaren Betrieb empfohlen.

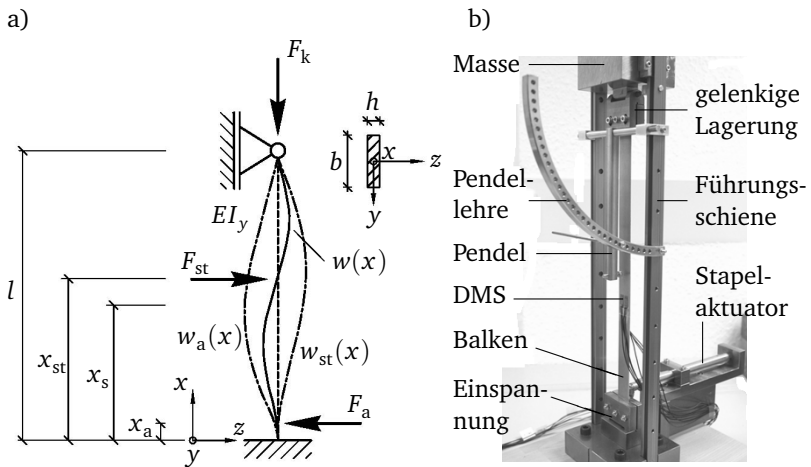
Parameter wie die Frequenz der elektrischen Betriebsspannung auf dem Stapelaktuator, das Hysterese- und temperaturabhängige Verhalten des PZT-Werkstoffs werden im Arbeitsdiagramm nicht berücksichtigt. Das temperaturabhängige und das Hysterese-Verhalten piezoelektrischer Stapelaktuatoren werden z. B. in [93, 45] und in [26, 27, 49] modelliert. Viele theoretische Modelle von piezoelektrischen Stapelaktuatoren wie das Goldfarb-Celanovic Modell [27], das Heinrich-Modell [37] und das Preisach-Hysterese Modell [26] oder das Wang-Modell [93] berücksichtigen spezifische Eigenschaften wie die Piezotät in [37], die nur in dem jeweiligen Modell vorkommen und/oder nur aus speziellen Messungen zu gewinnen sind. Die Blockierkraft  $F_B$  und der maximale freie Stellweg  $\Delta z_{\max}$  in Abbildung 2.2 werden in jedem Aktuatorendatenblatt angegeben. Deshalb kann das Arbeitsdiagramm in der frühen Entwicklungsphase von aktiven Systemen eingesetzt, um die Stellkräfte und -wege piezoelektrischer Stapelaktuatoren zu ermitteln.

In Informationsbroschüren von Aktuatorherstellern wie [76, 74] sind Richtwerte für die maximalen zulässigen Druckspannungen eines Stapelaktuators von 15 MPa für dynamische Kräfte und 30 MPa für statische Kräfte angegeben. Die tatsächliche mechanische Vorspannkraft in einem Stapelaktuator ist vom Stapelaktuatortyp, vom Hersteller und vom konkreten Anwendungsfall abhängig.

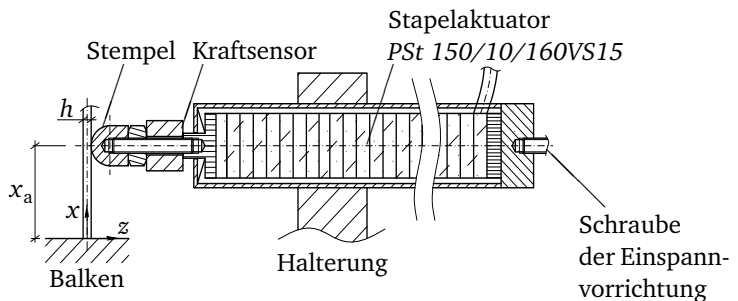
Die lokale Steifigkeit  $K$  der mechanischen Struktur, die mechanische Vorspannkraft  $F_v$  und die elektrische Betriebsspannung  $U$  am Stapelaktuator sind vom aktiven System, in dem die beiden Systemelemente eingesetzt werden, abhängig. Das untersuchte aktive System wird aus dem aktiven Balkensystem zur Stabilisierung eines knickgefährdeten Balkens mit einem piezoelektrischen Stapelaktuator in [20] abgeleitet. Aus diesem Grund wird das aktive Balkensystem aus [20] im nächsten Abschnitt vorgestellt.

## 2.2 Aktive Stabilisierung eines knickgefährdeten Balkens

Das aktive Balkensystem zur Stabilisierung eines knickgefährdeten Balkens aus [20] wurde im SFB 805 entwickelt und es stellt eine Technologie zur aktiven Stabilisierung von knickgefährdeten mechanischen Strukturen dar. Abbildung 2.3 zeigt in a) eine mechanische Prinzipskizze und in b) ein Bild des aktiven Balkensystems [20]. Abbildung 2.4 zeigt die Verbindung zwischen dem Stapelaktuator und dem Balken im aktiven Balkensystem.



**Abbildung 2.3:** a) mechanische Prinzipskizze und b) Bild des aktiven Balkensystems [20]

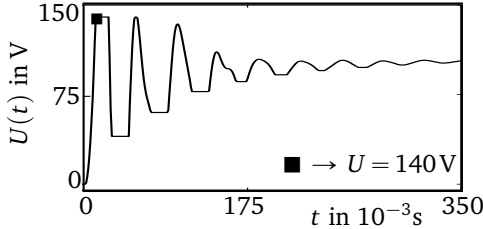


**Abbildung 2.4:** Verbindung zwischen dem Stapelaktuator und dem Balken im aktiven Balkensystem

Der knickgefährdete Balken ist ein schlanker Aluminiumbalken mit einem Rechteckquerschnitt, der Länge  $l = 320 \text{ mm}$ , der Breite  $b = 20 \text{ mm}$ , der Dicke  $h = 1 \text{ mm}$  und der Biegesteifigkeit  $EI_y$ . Er ist an der Stelle  $x = 0$  fest eingespannt und an der Stelle  $x = l$  gelenkig gelagert. Der eingesetzte Stapelaktuator ist ein Niedervoltaktuator vom Hersteller *Piezomechanik GmbH* mit der Bezeichnung *PSt 150/10/160VS15*, der Blockierkraft  $F_B = 3500 \text{ N}$ , dem maximalen freien Stellweg  $\Delta z_{\max} = 160 \mu\text{m}$  und der maximalen zulässigen elektrischen Betriebsspannung  $U_{\max} = 150 \text{ V}$  [76]. Es handelt sich dabei um einen mechanisch vorgespannten Stapelaktuator mit einem Gehäuse aus Aluminium. Der Balken wird mit einer aktiven Kraft  $F_a$  so verformt, dass sich die zweiten Biegeeigenform ausprägt, wenn zeitlich eine entgegengesetzte Verformung durch eine laterale Störkraft  $F_{\text{st}}$  einsetzt. Die Superposition der beiden statischen Biegelinien  $w_{\text{st}}(x)$  und  $w_a(x)$  aus den angreifenden Störkraft  $F_{\text{st}}$  und aktiven Kraft  $F_a$  soll also eine resultierende Biegelinie  $w(x)$  ergeben, die der zweiten Biegeeigenform des Balkens entspricht, siehe Abbildung 2.3a [20, 24]. Der Stapelaktuator wird an der Stelle  $x = x_a$  waagrecht zum Balken mit einer Schraube aus einer Einspannvorrichtung gegen den Balken gedrückt und dann mit einer Halterung fixiert, siehe in Abbildung 2.4. Er bewirkt eine Reduzierung der effektiven Knicklänge des Balkens  $0,7l \rightarrow 0,7(l - x_a)$  und seine aktive Kraft  $F_a$  wird mithilfe eines Stempels an der Stelle  $x = x_a$  gleichmäßig über die gesamte Breite  $b$  des Balkens eingeleitet. Dadurch fungiert der piezoelektrische Stapelaktuator als ein zusätzlicher Stützpunkt des Balkens [24].

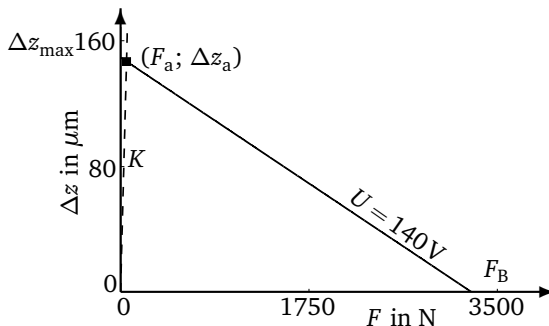
Eine Masse ( $\approx 2,5 \text{ kg}$ ) mit einem Gewicht äquivalent zur ersten kritischen Knickkraft des Balkens  $F_k \approx 25 \text{ N}$  wird auf den Balken über die gelenkige Lagerung an der Stelle  $x = l$  montiert, siehe Abbildung 2.3b. Durch ein Pendel und eine Pendellehre wird eine Störkraft  $F_{\text{st}}$  mit einer maximalen Amplitude von  $F_{\text{st}} = 0,17 \text{ N}$  reproduzierbar auf den Balken an der Stelle  $x_{\text{st}} = l/2$  aufgebracht. Zur Detektion des Ausknickvorgangs wird die Balkendehnung  $\varepsilon(x_s)$  an der Stelle  $x = x_s = 75 \text{ mm}$  mithilfe von zwei Dehnungsmessstreifen (DMS) auf dem Balken gemessen. Die Lage  $x = x_s$  der beiden DMS ist so gewählt, dass die Balkendehnung  $\varepsilon(x_s)$  an dieser Stelle sowohl in der Ruhelage als auch in der zweiten Biegeeigenform Null beträgt. Unter der Einwirkung der Störkraft  $F_{\text{st}}$  wird eine Balkendehnung  $\varepsilon(x_s) \neq 0$  gemessen. Dieses Signal wird in eine Regelstrecke bestehend aus einem PID Regler, einem Piezoverstärker und einem piezoelektrischen Stapelaktuator zur Erzeugung der aktiven geregelten Kraft  $F_a$  verwendet. Sobald die Balkendehnung  $\varepsilon(x_s) \approx 0$  beträgt, gilt die Stabilisierung des Balkens als erfolgreich. Eine ausführlichere Beschreibung des aktiven Balkensystems ist in [20, 23] zu finden.

Der zeitliche Verlauf der elektrischen Betriebsspannung  $U(t)$  am Stapelaktuator bei der Stabilisierung des Balkens nach der Einwirkung einer Störkraft  $F_{st} = 0,17\text{ N}$  ist in Abbildung 2.5 zu sehen [20].



**Abbildung 2.5:** Verlauf der elektrischen Betriebsspannung  $U(t)$  des Stapelaktuators im aktiven Balkensystem [20]

Ein Einschwingvorgang mit einer Dauer von  $\approx 0,35\text{ s}$  ist in Abbildung 2.5 zu sehen. Die maximale elektrische Betriebsspannung im Laufe einer Stabilisierung in Abbildung 2.5 beträgt  $U = 140\text{ V}$ . Eine Stellgrößenbegrenzung im PID Regler begrenzt die elektrische Betriebsspannung  $U(t)$  auf den Wert  $U = 140\text{ V}$ , um den Stapelaktuator vor elektrischen Betriebsspannungen, die größer als seine maximale zulässige elektrische Betriebsspannung  $U_{max} = 150\text{ V}$  sind, zu schützen [20]. Abbildung 2.6 zeigt den nominalen Arbeitspunkt des Stapelaktuators *PSt 150/10/160VS15*, der für die maximale elektrische Betriebsspannung  $U = 140\text{ V}$  mit dem Gleichungssystem (2.4) des Arbeitsdiagramms ermittelt wird [70, 68].



**Abbildung 2.6:** Kritischer Arbeitspunkt (■) des Stapelaktuators im aktiven Balkensystem für die Betriebsspannung  $U = 140\text{ V}$

---

Der Stapelaktuator *PSt 150/160/10V15* erzeugt eine Stellkraft  $F_a = 55,05 \text{ N}$  und einen Stellweg  $\Delta z_a = 146 \mu\text{m}$  bei der maximalen elektrischen Betriebsspannung  $U = 140 \text{ V}$  innerhalb eines aktiven Stabilisierungsvorgangs. Somit werden im aktiven Balkensystem  $\approx 91 \%$  des maximalen freien Stellwegs  $\Delta z_{\max} = 160 \mu\text{m}$  und  $\approx 1,5 \%$  der Blockierkraft  $F_B = 3500 \text{ N}$  des Stapelaktuators ausgenutzt.

Die nicht optimale Ausnutzung der Stellkraftmöglichkeiten des Stapelaktuators zeigt, dass dieser für den Einsatz im aktiven Balkensystem überdimensioniert ist. Für eine optimale Ausnutzung des Stapelaktuators sollten die Steigungen der Kraft-Weg-Kennlinien des Stapelaktuators und des Balkens in Abbildung 2.6 gleich groß sein, so dass der Stapelaktuator die maximale mechanische Energie  $E_m = (1/8)F_B \Delta z_{\max}$  erzeugen kann [77]. Dies ist im Arbeitsdiagramm in Abbildung 2.6 nicht der Fall. Ein kleinerer Stapelaktuator mit einem eingebauten Hebelmechanismus [74] zur Vergrößerung der Stellwege könnte im aktiven Balkensystem eingesetzt werden. Eine direkte Einleitung der aktiven Kraft  $F_a$  des Stapelaktuators in den Balken wie in Abbildung 2.4 wäre nicht mehr gegeben und die geometrischen Abmessungen des Hebelmechanismus' wären als störende Eigenschaften im Gleichungssystem (2.4) zu berücksichtigen. Eine andere Möglichkeit besteht darin, einen piezoelektrischen Biegeaktuator einzusetzen, der im Vergleich zu einem Stapelaktuator größere Stellwege bei kleineren Stellkräften erzeugt. Aber die niedrigere Steifigkeit von piezoelektrischen Biegeaktuatoren würde die Reduzierung der effektiven Knicklänge des Balkens  $0,7l \rightarrow 0,7(l - x_a)$  aufgrund des zusätzlichen Stützpunkts durch die Aufbringung eines Stapelaktuators an der Stelle  $x_a$  abschwächen. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, aktive Momente nahe der unteren festen Einspannung des Balkens mit aufgeklebten piezoelektrischen Patches einzuleiten [94]. Eine solche Klebung ist z. B. bei druckbelasteten Stangen in Kolben-Stangenverbindungen nicht erwünscht, weil ihre Laufflächen frei bleiben müssen.

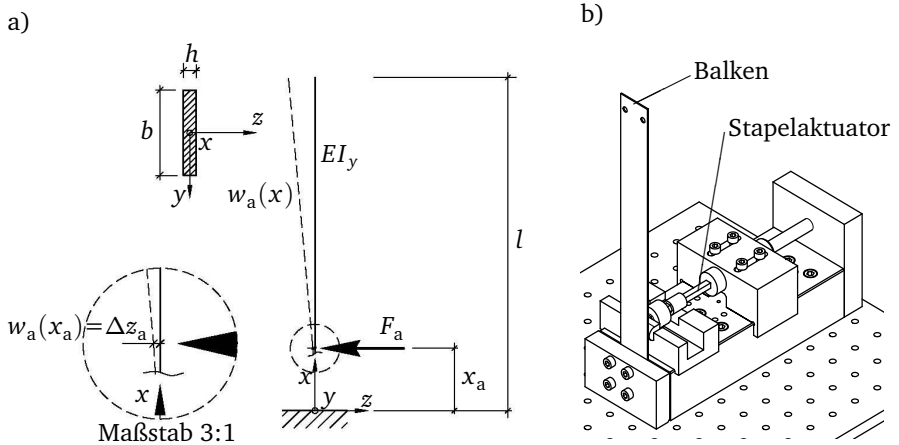
Die nicht optimale Ausnutzung der Stellkraft- und Stellwegmöglichkeiten des Stapelaktuators im Arbeitspunkt in Abbildung 2.6 ist für die Betrachtung von Eigenschaftsstreuung als Unsicherheit in der Anwendung des Arbeitsdiagramms vorteilhaft. Die Streuungen in den Eigenschaften wie die Blockierkraft  $F_B$  des Stapelaktuators und die Dicke  $h$  des Balkens können dazu führen, dass der Stellweg  $\Delta z_a$  den maximalen freien Stellweg  $\Delta z_{\max} = 160 \mu\text{m}$  übersteigt und Depolarisationseffekte im Stapelaktuator auftreten. Dieser wäre nicht mehr in der Lage, die notwendige Stellkraft  $F_a$  zur Stabilisierung des Balkens im aktiven Balkensystem zu generieren.

Das aktive Balkensystem in Abbildung 2.3 dient als Vorlage für das untersuchte aktive System, das im nächsten Abschnitt vorgestellt wird.

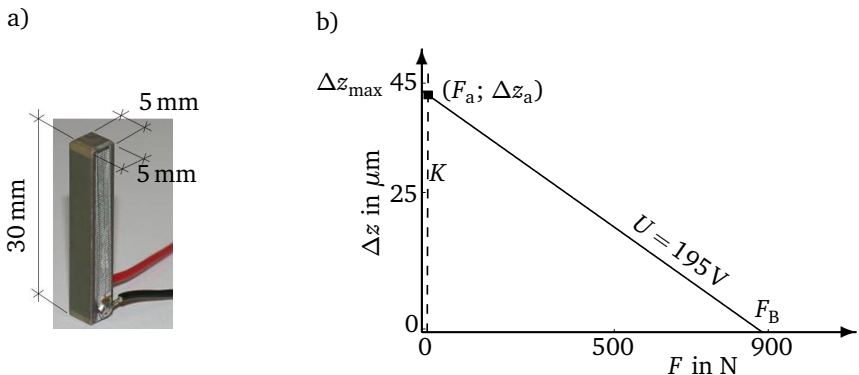


## 2.3 Beschreibung des untersuchten aktiven Systems

Abbildung 2.7 zeigt in a) eine mechanische Prinzipskizze des aktiven Systems und in b) ein CAD-Modell der Einspannvorrichtung des aktiven Systems mit den montierten Stapelaktuator und Balken.



**Abbildung 2.7:** a) mechanische Prinzipskizze des aktiven Systems und  
b) CAD-Modell der Einspannvorrichtung, vgl. Abbildung 5.3



**Abbildung 2.8:** a) Piezoelektrischer Stapelaktuator vom Typ 3 9999-62 und  
b) sein Arbeitsdiagramm mit dem kritischen Arbeitspunkt ( $\blacksquare$ ) für die Betriebsspannung  $U = 195\text{ V}$  und die Vorspannkraft  $F_v = 15\text{ N}$ , vgl. mit dem Arbeitsdiagramm in Abbildung 2.6

---

Ein Aluminiumbalken mit einem Rechteckquerschnitt, der Länge  $l = 235 \text{ mm}$ , Breite  $b = 30 \text{ mm}$ , Dicke  $h = 1 \text{ mm}$  und dem Elastizitätsmodul  $E = 70.000 \text{ N/mm}^2$  ist an der Stelle  $x = 0$  fest eingespannt und an der Stelle  $x = l$  frei gelagert, siehe Abbildung 2.7a. Er wird mit einer lateralen aktiven Kraft  $F_a$  an der Stelle  $x = x_a = 22 \text{ mm}$  nahe seiner unteren festen Einspannung auf Biegung belastet. Die aktive laterale Kraft  $F_a$  wird von einem Stapelaktuator generiert und an der Stelle  $x = x_a$  über einen Stempel in den Balken eingeleitet, siehe Abbildung 2.7b. Der verwendete Stapelaktuator im aktiven System ist von der Firma CERAMTEC GmbH mit der Kurzbezeichnung 3 9999-62, den geometrischen Abmessungen  $30 \times 5 \times 5 \text{ mm}^3$ , der Blockierkraft  $F_B = 900 \text{ N}$ , dem maximalen freien Stellweg  $\Delta z_{\max} = 45 \mu\text{m}$  und der maximalen elektrischen Betriebsspannung  $U_{\max} = 200 \text{ V}$  [11], siehe Abbildung 2.8a. Eine ausführlichere Beschreibung des untersuchten aktiven Systems wird in Kapitel 5 vorgenommen.

Das aktive System in Abbildung 2.7 stellt eine Vereinfachung des aktiven Balkensystems in Abbildung 2.3 dar. Das Zusammenspiel zwischen Stapelaktuator und Balken steht im Vordergrund des aktiven Systems in Abbildung 2.7.

Ohne die gelenkige Lagerung an der Stelle  $x = l$  in Abbildung 2.3 entfallen unerwünschte Einflussfaktoren wie Lagerreibung im untersuchten aktiven System in Abbildung 2.7. Die feste Einspannung an der Stelle  $x = 0$  und die Einleitung der aktiven Kraft an der Stelle  $x = x_a$  entsprechen den Randbedingungen des Balkens im aktiven Balkensystem in Abbildung 2.3.

Das Arbeitsdiagramm des Stapelaktuators in Abbildung 2.8b zeigt auch bei elektrischen Betriebsspannungen nahe seinem maximalen zulässigen Wert  $U_{\max} = 200 \text{ V}$  eine nicht optimale Ausnutzung der Stellkraft- und Stellwegmöglichkeiten des Stapelaktuators wie im aktiven Balkensystem in Abbildung 2.6. Im Gegensatz zum Stapelaktuator im aktiven Balkensystem in Abbildung 2.4, besteht der Stapelaktuator vom Typ 3 9999-2 in Abbildung 2.8 nur aus einem piezoelektrischen Stapel ohne Gehäuse und mechanische Vorspannung. Dadurch können die Streuungen in der Blockierkraft und im maximalen freien Stellweg vor allem auf dem piezoelektrischen Stapelaktuator zurückgeführt werden.

Die Beschaffungskosten für einen Stapelaktuator vom Typ 3 9999-2 sind mit  $\approx 100 \text{,-€}$  pro Stück kleiner als die vom Stapelaktuator im aktiven Balkensystem mit  $\approx 1500 \text{,-€}$  pro Stück. Im Anhang A.1 ist ein Auszug vom Datenblatt eines Stapelaktuators vom Typ 3 9999-62 in Abbildung 2.8 angegeben.

### 2.3.1 Anwendung des Arbeitsdiagramms

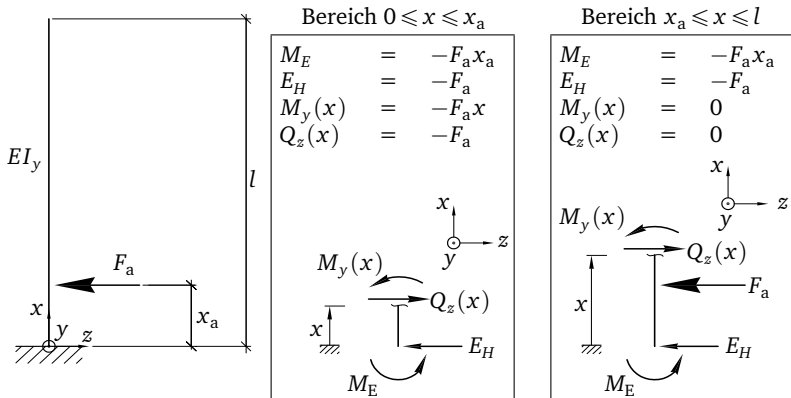
Das allgemeingültige Arbeitsdiagramm aus dem Gleichungssystem (2.4) wird auf das untersuchte aktive System in Abbildung 2.7 angewendet, um die unsicheren Eigenschaften des Stapelaktuators und des Balkens bei der Abschätzung der Stellkräfte und -wege mit dem Arbeitsdiagramm zu identifizieren. Hierfür wird die nominale lokale Steifigkeit  $K$  des Balkens in Abbildung 2.7 hergeleitet und in das Gleichungssystem (2.4) des Arbeitsdiagramms eingesetzt.

#### Nominale lokale Steifigkeit $K$ des Balkens

Der Balken wird als ein Euler-Bernoulli Balken mit einem über seine gesamte Länge  $l$  konstanten Querschnitt  $A=bh$  und einem homogenen Werkstoff mit konstantem Elastizitätsmodul  $E$  angenommen. Für die lokale Steifigkeit des Balkens gilt

$$K = \frac{F_a}{w_a(x_a)}, \quad (2.5)$$

mit der Stellkraft  $F_a$  und der von ihr induzierten Durchbiegung  $w_a(x_a)$  des Balkens an der Stelle  $x = x_a$ . Die Durchbiegung des Balkens  $w_a(x)$  kann mithilfe des Biegemoments  $M_y(x)$  im Balken ermittelt werden, siehe Abbildung 2.9.



**Abbildung 2.9:** Freikörperbilder des Balkens im aktiven System mit der Querkraft  $Q_z(x)$ , dem Biegemoment  $M_y(x)$  und den Auflagerreaktionen  $M_E$  und  $E_H$

Als Euler-Bernoulli Balken gilt die Differentialgleichung aus [28]

$$-EI_y \frac{d^2}{dx^2}[w_a(x)] = -EI_y w_a''(x) = M_y(x), \quad (2.6)$$

für die Durchbiegung  $w_a(x)$  des Balkens in Abbildung 2.7 mit  $0 \leq x \leq l$ , dem Biegemoment  $M_y(x)$  in Abbildung 2.9, dem axialen Flächenträgheitsmoment zweiten Grades des Balkens [28]

$$I_y = \frac{bh^3}{12}, \quad \text{und} \quad (2.7)$$

dem Elastizitätsmodul  $E$  des Balkenwerkstoffs. Die Integration der Differentialgleichung (2.6) mit den Randbedingungen des Balkens in Abbildung 2.7a

$$w_a(0) = 0, \quad w_a'(0) = 0, \quad w_a''(l) = 0 \quad \text{und} \quad w_a'''(l) = 0, \quad (2.8)$$

führt zu

$$w_a(x) = \begin{cases} -\frac{F_a}{EI_y} \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x_a}{2} x^2 \right), & 0 \leq x \leq x_a \\ -\frac{F_a x_a^2}{EI_y} \left( -\frac{x}{2} + \frac{x_a}{6} \right), & x_a \leq x \leq l \end{cases}. \quad (2.9)$$

Mit den Gleichungen (2.9) und (2.7) wird die nominale lokale Steifigkeit  $K$  des Balkens aus der Gleichung (2.5) zu

$$K = \frac{Ebh^3}{4x_a^3}. \quad (2.10)$$

Das Einsetzen der nominalen lokalen Steifigkeit des Balkens in Gleichung (2.10) in das Gleichungssystem (2.4) liefert das spezifische Arbeitsdiagramms-Modell des piezoelektrischen Stapelaktuator im untersuchten aktiven System

$$\left\{ \begin{array}{l} F_a(U) = \frac{\Delta z_{\max}}{4x_a^3 + \frac{\Delta z_{\max}}{F_B}} \left( \frac{U}{U_{\max}} \right) + F_v \\ \Delta z_a(U) = \frac{4x_a^3}{Ebh^3} (F_a(U) - F_v) - \frac{\Delta z_{\max}}{F_B} F_v \end{array} \right. \quad (2.11)$$

---

### 2.3.2 Relevante Aktuator- und Balkeneigenschaften

---

Nach dem Arbeitsdiagramm im Gleichungssystem (2.11) sind die nominalen Stellkräfte und -wege bzw. die nominalen Arbeitspunkte des Stapelaktuators im aktiven System von den Aktuatoreigenschaften:

- Blockierkraft  $F_B$ ,
- maximaler freier Stellweg  $\Delta z_{\max}$ ,
- maximale zulässige elektrische Betriebsspannung  $U_{\max}$ ,

von den Balkeneigenschaften:

- Länge  $l$ ,
- Dicke  $h$ ,
- Angriffspunkt  $x_a$  der aktiven Kraft  $F_a$  auf dem Balken,
- Elastizitätsmodul  $E$  des Balkenswerkstoffs (Aluminium), und

von den Parametern:

- elektrische Betriebsspannung  $U$ , und
- mechanische Vorspannkraft  $F_v$  am Stapelaktuator abhängig.

Das Gleichungssystem (2.11) berücksichtigt keine Streuungen in den aufgelisteten Aktuator- und Balkeneigenschaften. Bei aktiven Systemen wie dem aktiven Balkensystem in Abbildung 2.7 in denen ein Stapelaktuator aufgrund einer niedrigen lokalen Steifigkeit  $K$  und einer hohen elektrischen Betriebsspannung  $U$  nahe an seinem maximalen freien Stellweg  $\Delta z_{\max}$  betrieben wird, könnte Eigenschaftsstreuung zur Überschreitung des maximalen freien Stellwegs führen. Aus diesem Grund sollten die Einflüsse von Streuungen in den aufgelisteten Aktuator- und Balkeneigenschaften auf die Stellkräfte und -wege eines Stapelaktuators bereits in der Auslegung eines aktiven Systems ermittelt werden.

Die Beschreibung und Bewertung der Streuungen in den aufgelisteten Aktuator- und Balkeneigenschaften als Unsicherheit in der Anwendung des Arbeitsdiagramms auf das untersuchte aktive System wird mit dem neuen Ansatz des SFB 805 zur Beherrschung von Unsicherheit in lasttragenden Systemen des Maschinenbaus aus [33] in Kapitel 4 durchgeführt. Davor wird der Ansatz des SFB 805 im nächsten Kapitel vorgestellt.

---

## 3 Ansatz des Sonderforschungsbereichs 805

In diesem Kapitel wird der Ansatz des Sonderforschungsbereichs SFB 805 zur Beherrschung von Unsicherheit vorgestellt. Ziel des Sonderforschungsbereichs SFB 805 ist die Beherrschung von Unsicherheit in lasttragenden Systemen des Maschinenbaus, wodurch u. a. ihre Überdimensionierung vermieden wird, ihre Einsatzbereiche erweitert und Ressourcen geschont werden. Lasttragende Systeme sind technische Systeme, die zum einen während ihrer Nutzung mechanischen Belastungen ausgesetzt sind und zum anderen eine stützende und/oder eine tragende Wirkung bei der Erfüllung ihrer Funktionalität aufweisen [34].

---

### 3.1 Grundlagen des Ansatzes

---

Der Ansatz des SFB 805 stützt sich auf eine Arbeitshypothese zu Unsicherheit, ein Unsicherheitsmodell und eine methodische Vorgehensweise zur Beherrschung von Unsicherheit. Die Arbeitshypothese zu Unsicherheit wird im folgenden Abschnitt vorgestellt.

---

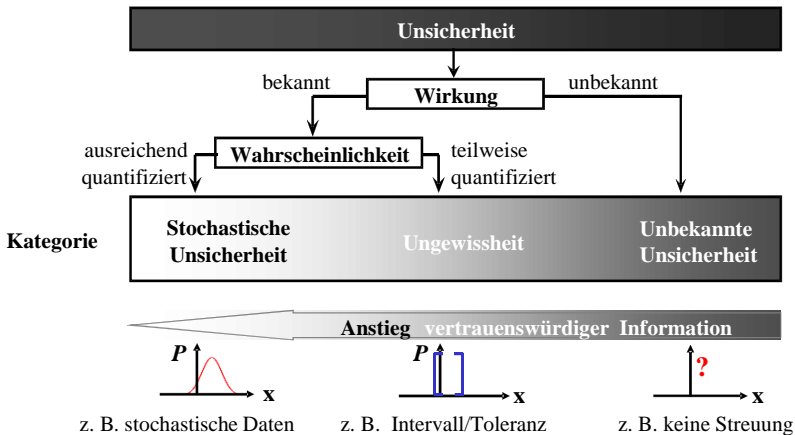
#### 3.1.1 Arbeitshypothese zur Unsicherheit

---

Die folgende Arbeitshypothese zur Unsicherheit wurde im SFB 805 formuliert: „*Unsicherheit tritt auf, wenn die Prozesseigenschaften eines technischen Systems nicht oder nur eingeschränkt determiniert werden können*“ [33]. Die Arbeitshypothese des SFB 805 zu Unsicherheit gilt für alle Prozesse in der Entwicklung, Produktion, Nutzung und Wiederverwendung im Lebenslauf eines lasttragenden Systems. Ein Unsicherheitsmodell wurde im SFB 805 entwickelt, um die unterschiedlichen Formen von Unsicherheit wie *aleatorische*, *epistemische* und *parametrische Unsicherheit* aus dem Stand der Wissenschaft in den Prozessen der Entwicklung, Produktion und Nutzung eines technischen Systems einheitlich zu beschreiben. Dieses Unsicherheitsmodell wird im nächsten Abschnitt vorgestellt.

### 3.1.2 Unsicherheitsmodell

Abbildung 3.1 zeigt ein angepasstes Unsicherheitsmodell des SFB 805 in [33, 35], das Unsicherheit in die drei Kategorien stochastische Unsicherheit, Ungewissheit und unbekannte Unsicherheit unterteilt.



**Abbildung 3.1:** Unsicherheitsmodell des SFB 805 mit der Einteilung von Unsicherheit in stochastische Unsicherheit, Ungewissheit und unbekannte Unsicherheit, vgl. [35]

Die Anpassung des Unsicherheitsmodells in Abbildung 3.1 besteht darin, dass die in [33, 35] angegebene Unsicherheitskategorie Unwissen durch unbekannte Unsicherheit ersetzt wurde. Unwissen liegt bei der Anwendung eines Arbeitsdiagramms nicht vor, da es z. B. das Fehlen jeglicher Informationen und Annahmen über die relevanten Eigenschaften eines Stapelaktuators und des Balkens im Gleichungssystem (2.11) des Arbeitsdiagramms bedeuten würde. Unsicherheitsmerkmale werden im SFB 805 in Abhängigkeit vom Grad der verfügbaren und vertrauenswürdigen Informationen über ihre Wahrscheinlichkeit und ihre Wirkung auf einen Prozess in unbekannte Unsicherheit, Ungewissheit und stochastische Unsicherheit eingeteilt [33, 35]. Ist die Wirkung eines Unsicherheitsmerkmals auf einen Prozess unbekannt, wird es in die Kategorie unbekannte Unsicherheit eingeordnet. Ist die Wirkung eines Unsicherheitsmerkmals auf einen Prozess bekannt und ihre Wahrscheinlichkeit nur teilweise quantifiziert, z. B. anhand von Toleranzen und Intervallen, wird das Unsicherheitsmerkmal in die Kategorie Ungewissheit eingeordnet. Ist die Wirkung eines Unsicherheitsmerkmals auf einen

---

Prozess bekannt und ihre Wahrscheinlichkeit ausreichend quantifiziert, z. B. anhand stochastischer Daten wie Verteilungsfunktionen über seine Wirkung, wird das Unsicherheitsmerkmal in die Kategorie stochastische Unsicherheit eingeordnet. Von der unbekannten bis zur stochastischen Unsicherheit nimmt der Anteil der vertrauenswürdigen und verfügbaren Informationen über Wahrscheinlichkeit und Wirkung eines Unsicherheitsmerkmals auf einen Prozess sowie die daraus ableitbaren Handlungsanweisungen zur Beherrschung von Unsicherheit zu [35].

In dieser Arbeit stellt die rechnerische Abschätzung der Stellkräfte und -wege eines piezoelektrischen Stapelaktuators mit seinem Arbeitsdiagramm einen Prozess dar, der von den Streuungen in den Eigenschaften des Stapelaktuators wie seine Blockierkraft  $F_B$  und des Balkens wie seine Dicke  $h$  im aktiven System in Kapitel 2 beeinflusst wird.

Die Unsicherheitskategorien des SFB 805 greifen auf bereits existierende Unsicherheitsbegriffe zurück, die mit dem Grad an verfügbaren Informationen über einen Prozess, seine Unsicherheitsmerkmale und ihre Wirkungen auf den Prozess verknüpft werden. Stochastische Unsicherheit in Abbildung 3.1 steht bereits in [7, 65, 88] als ein Synonym für aleatorische Unsicherheit. Ungewissheit wird bereits in [8] als Vagheit, Unschärfe und Veränderlichkeit definiert und ihre mathematische Beschreibung mit Intervallen und Grenzwerten führt auf die Kategorie epistemische Unsicherheit zurück. Die im SFB 805 vorgeschlagene Vorgehensweise zur Beherrschung von Unsicherheit wird im folgenden Abschnitt vorgestellt.

Im SFB 805 werden drei Schritte für eine ganzheitliche Beherrschung von Unsicherheit vorgeschlagen:

- die Beschreibung von Unsicherheit,
- die Bewertung von Unsicherheit und
- die Lösungsansätze zur Beherrschung von Unsicherheit [33, 35].

---

### 3.2 Beschreibung von Unsicherheit

---

Die Prozesse im Lebenslauf eines technischen Systems und die darin vorkommenden Unsicherheitsmerkmale werden beschrieben. Basierend auf verfügbaren und vertrauenswürdigen Informationen über ein Unsicherheitsmerkmal, seine Wahrscheinlichkeit und seine Wirkung auf einen Prozess wird dieses Merkmal in die Kategorien unbekannte Unsicherheit, Ungewissheit und stochastische Unsicherheit eingeteilt [33]. Die Beschreibung der rechnerischen Abschätzung der Stellkräfte und -wege eines Stapelaktuators ist bereits in Kapitel 2 durch



---

die Vorstellung des Arbeitsdiagramms mit dem Gleichungssystem (2.11) erfolgt. Als Eingangsgröße des Prozesses gilt die elektrische Betriebsspannung  $U$  auf dem Stapelaktuator. Als Ausgangsgrößen des Prozesses gelten die Stellkraft  $F_a(U)$  und den Stellweg  $\Delta z_a(U)$  des Stapelaktuators im aktiven System in Abbildung 2.7. Die Blockierkraft  $F_B$ , der maximal freie Stellweg  $\Delta z_a$ , die maximal zulässige elektrische Betriebsspannung  $U_{\max}$  und die mechanische Vorspannkraft  $F_v$  des Stapelaktuators und die Länge  $l$ , die Breite  $b$  und Dicke  $h$  des Balkens sowie der Angriffspunkt  $x_a$  der aktiven Kraft auf dem Balken und der Elastizitätsmodul  $E$  des Balkenwerkstoffs (Aluminium) sind die Parameter des untersuchten Prozesses. Die Beschreibung von Unsicherheit in der Anwendung des Arbeitsdiagramms für das aktive System in Abbildung 2.7 wird im nächsten Kapitel 4 mit der Quantifizierung der Streuungen in den Eigenschaften des Stapelaktuators wie seine Blockierkraft  $F_B$  und sein maximal freier Stellweg  $\Delta z_{\max}$  und des Balkens wie seine Breite  $b$  durchgeführt.

---

### 3.3 Bewertung von Unsicherheit

---

In der Bewertung von Unsicherheit werden die Einflüsse bzw. Wirkung eines Unsicherheitsmerkmals auf einen bestimmten Prozess ermittelt [35]. In dieser Arbeit werden z. B. die Auswirkungen der Streuungen in der Dicke  $h$  des Balkens und im maximal freien Stellweg  $\Delta z_{\max}$  des Stapelaktuators auf die aktive Stellkraft  $F_a$  im aktiven System numerisch ermittelt. Hierfür werden Worst-Case Analysen und Monte Carlo-Simulationen [47, 75] am Arbeitsdiagramm des Stapelaktuators im aktiven System durchgeführt, siehe Gleichungssystem (2.11).

Worst-Case Analysen werden in dieser Arbeit eingesetzt, wenn Informationen über die Streuungen in den Aktuator- und Balkeneigenschaften im Arbeitsdiagramm in Form von Intervallen bestehend aus Kleinst- und Höchstwerten (Ungewissheit) vorliegen. Bei den Worst-Case Analysen wird angenommen, dass jede streuende Eigenschaft entweder den Kleinst- oder Höchstwert des jeweiligen Intervalls besitzt. Somit werden jeweils der „schlechteste“ oder der „beste“ Stapelaktuator bzw. Balken simuliert. Die Eigenschaftswerte der so simulierten Stapelaktuatoren und Balken werden in das Arbeitsdiagramm-Modell bzw. ins Gleichungssystem (2.11) eingesetzt, um die dazugehörigen Grenzwerte der Stellkräfte und -wege zu ermitteln. Eine ausführliche Beschreibung der durchgeführten Worst-Case Analysen am Arbeitsdiagramm des Stapelaktuators vom Typ 3.9999-62 im aktiven System steht im Kapitel 4.

In dieser Arbeit werden Monte Carlo-Simulationen eingesetzt, um die Erwartungswerte, Verteilungsfunktionen und Quantile der Stellkräfte und -wege des Stapelaktuators im aktiven System in Abhängigkeit bekannter und angenom-

---

mener Verteilungsfunktionen der streuenden Aktuator- und Balkeneigenschaften (stochastische Unsicherheit) zu ermitteln, siehe Kapitel 4. Worst-Case Analysen und Monte Carlo-Simulationen sind bereits existierenden Simulationsmethoden, die unabhängig vom Ansatz des SFB 805 sind. Ihre Eignung zur Bewertung der Einflüsse von Streuungen in den Aktuator- und Balkeneigenschaften in Abschnitt 2.3.2 auf die Stellkräfte und -wege aus dem Arbeitsdiagramm wird in Kapitel 4 gezeigt.

---

### **3.4 Lösungsansätze zur Beherrschung von Unsicherheit**

---

Zu den Lösungsansätzen zur Beherrschung von Unsicherheit gehören Methoden, Maßnahmen und Technologien zur Vermeidung, Beseitigung und Reduzierung der Einflüsse bzw. der Wirkung eines Unsicherheitsmerkmals auf einen Prozess oder zur Anpassung eines Prozesses an einem Unsicherheitsmerkmal [35]. Ein technologisches Beispiel für die Beherrschung von Unsicherheit stellt das aktive Balkensystem in Abbildung 2.3 dar, in dem ein knickgefährdeter Balken gegen die Einwirkung einer zusätzlichen Störkraft aktiv stabilisiert wird [20, 21].

Die Vermeidung, Beseitigung und/oder Reduzierung der Streuungen in den Aktuator- und Balkeneigenschaften im Arbeitsdiagramm aus dem Gleichungssystem (2.11) werden in dieser Arbeit nicht verfolgt. Die Wirkungen dieser Streuungen auf die Stellkräfte und -wege eines Stapelaktuators sollen quantifiziert werden, um z. B. eine Überschreitung von Grenzwerten wie der maximale freie Stellweg des Stapelaktuators im aktiven System zu vermeiden.

In Kapitel 4 werden die Streuungen in den Aktuator- und Balkeneigenschaften des Stapelaktuators beschrieben und ihre Einflüsse auf die numerischen Stellkräfte und -wege des Stapelaktuators im aktiven System werden mit Worst-Case Analysen und Monte Carlo-Simulationen analytisch und numerisch bewertet.

---

## 4 Beschreibung und numerische Bewertung der Unsicherheit

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden die Streuungen in den zitierten Aktuator- und Balkeneigenschaften in Abschnitt 2.2 beschrieben und in den Unsicherheitskategorien Ungewissheit und stochastische Unsicherheit aus dem Kapitel 3 klassifiziert. Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels werden Worst-Case Analysen und Monte Carlo-Simulationen durchgeführt, um die Einflüsse der beschriebenen Streuungen in den Aktuator- und Balkeneigenschaften auf die numerischen Stellkräfte und -wege des Stapelaktuators im aktiven System zu bewerten.

Die Arbeitspunkte des Stapelaktuators vom Typ 3 9999-62 in Abbildung 2.8 werden für drei Balken mit den nominalen Dicken  $h_1 < h_2 < h_3$ , mit  $h_1 = 1\text{ mm}$ ,  $h_2 = 2\text{ mm}$  und  $h_3 = 3\text{ mm}$  und für eine Betriebsspannung  $U = 195\text{ V}$  im aktiven System untersucht. Die Dicke  $h$  des Balkens wirkt mit der dritten Potenz in die Berechnung der nominalen lokalen Steifigkeit  $K$  des Balkens nach der Gleichung (2.10) ein, und stellt somit die einflussreichste geometrische Abmessung des Balkens in der Ermittlung von  $K$  dar. Mit den nominalen Dicken  $h_1 < h_2 < h_3$  für den Balken im aktiven System werden die Einflüsse unterschiedlicher nominalen lokalen Steifigkeiten  $K_1 < K_2 < K_3$  auf die Variationen der Arbeitspunkte im aktiven System ermittelt. Die elektrische Betriebsspannung  $U = 195\text{ V}$  und die mechanische Vorspannkraft  $F_v = 15\text{ N}$  werden nach dem kritischen nominalen Arbeitspunkt des Stapelaktuators in Abbildung 2.8 gewählt. Im kritischen Arbeitspunkt können Streuungen in den Aktuator- und Balkeneigenschaften für alle drei Balken zu einer Überschreitung des maximalen freien Stellwegs des Stapelaktuators führen.

---

### 4.1 Beschreibung der angenommenen Unsicherheit

---

In Tabelle 4.1 sind die Streuungen in den Aktuator-, Balkeneigenschaften im Arbeitsdiagramm des Stapelaktuators mit ihren Nominalwerten zusammengefasst.

Die Nominalwerte und Streuungen der Blockierkraft  $F_B$  und des maximalen freien Stellwegs  $\Delta z_{\max}$  stammen aus dem Datenblatt [11] des Stapelaktuators. Die Streuungen von  $\pm 10\%$  für  $F_B$  und  $\Delta z_{\max}$  gelten nur für den untersuchten Stapelaktuator vom Typ 3 9999-62 der *Ceramtec GmbH* in Abbildung 2.8. Für

**Tabelle 4.1:** Nominalwerte und Streuungen der relevanten Eigenschaften des Stapelaktuator vom Typ 3 9999-62 und des Balkens im aktiven System

| Eigenschaft  |             |                   |                       | Unsicherheit               |                |        |
|--|-------------|-------------------|-----------------------|----------------------------|----------------|--------|
|  | Nominalwert | Einheit           | Sreuung               | stochastische Unsicherheit | Ungewissheit   | Quelle |
| Stapelaktuator vom Typ 3 9999-62                     |             |                   |                       |                            |                |        |
| Blockierkraft $F_B$                                  | 900         | N                 | $\pm 10\%$            | -                          | [810; 990]     | [11]   |
| max. freier Stellweg $\Delta z_{\max}$               | 45          | $\mu\text{m}$     | $\pm 10\%$            | -                          | [41,5; 49,5]   | [11]   |
| max. zul. Betriebsspannung $U_{\max}$                | 200         | V                 | -                     | -                          | -              | [11]   |
| mechanische Vorspannkraft $F_v$                      | 15          | N                 | $\pm 10\%$            | -                          | -              | *      |
| Balken   |             |                   |                       |                            |                |        |
| Angriffspunkt $x_a$ der aktiven Kraft auf dem Balken | 22          | mm                | $\pm 0,1 \text{ mm}$  | -                          | -              | *      |
| Länge $l$  | 235         | mm                | $\pm 0,2 \text{ mm}$  | -                          | [234,8; 235,2] | [14]   |
| Breite $b$   | 30          | mm                | $\pm 0,1 \text{ mm}$  | -                          | [29,9; 30,1]   | [14]   |
| Dicke $h_1$  | 1           | mm                | $\pm 0,05 \text{ mm}$ | -                          | [0,95; 1,05]   | [14]   |
| Dicke $h_2$  | 2           | mm                | $\pm 0,05 \text{ mm}$ | -                          | [1,95; 2,05]   | [14]   |
| Dicke $h_3$  | 3           | mm                | $\pm 0,05 \text{ mm}$ | -                          | [2,95; 3,05]   | [14]   |
| E-modul $E$ des Balkenwerkstoffs (ALMg3)             | 70.000      | N/mm <sup>2</sup> | -                     | -                          | -              | *      |

Legende

- keine verfügbare Informationen bzw. nicht gegeben

\* Annahme vom Autor

alle Stellwege in  $\mu\text{m} \Rightarrow 10^{-6} \text{ m}$

---

den Stapelaktuator *PSt 150/10/160VS15* in Abbildung 2.4 betragen z. B. die Streuungen  $\pm 20\%$  für  $F_B$  und  $0 \dots +15\%$  für  $\Delta z_{\max}$  [70, 71].

Die mechanische Vorspannkraft  $F_v$  des Stapelaktuators wird im Datenblatt [11] des Stapelaktuators nicht angegeben, weil dieser ohne Gehäuse vom Hersteller angeboten wird. In dieser Arbeit wird zunächst der Nominalwert  $F_v = 15\text{ N}$  für die mechanische Vorspannung  $F_v$  des Stapelaktuators mit einer Streuung von  $\pm 10\%$  um diesen Nominalwert angenommen. Dieser Wert der mechanischen Vorspannkraft induziert eine geringe Druckspannung von  $0,6\text{ MPa}$  im Stapelaktuator in Abbildung 2.8 und vermeidet gleichzeitig eine plastische Verformung des Balkens in seiner Einspannung an der Stelle  $x = 0$ , siehe Abbildung 2.7.

Der Angriffspunkt  $x_a$  der aktiven Aktuatorekraft  $F_a$  auf dem Balken ist in Abbildung 2.7 dargestellt. Sein Nominalwert beträgt  $x_a = 22\text{ mm}$  und eine Streuung von  $\pm 0,1\text{ mm}$  um diesen Nominalwert wird an dieser Stelle angenommen. Die drei unterschiedlichen nominalen Dicken  $h_1 < h_2 < h_3$  der drei Balken mit den Balkensteifigkeiten  $K_1 < K_2 < K_3$  besitzen nach der Norm DIN ISO 2768-1 [14], Allgemeintoleranzen für Längen- und Winkelmaße, die gleiche Streuung von  $\pm 0,05\text{ mm}$ .

Der Elastizitätsmodul  $E$  des Balkenwerkstoffs wird aus dem Datenblatt eines Werkstoffsherstellers entnommen. Im Datenblatt wird der Elastizitätsmodul mit seinem Nominalwert  $E = 70.000\text{ N/mm}^2$  angegeben. Informationen über die Streuung in dem Elastizitätsmodul  $E$  des isotropen Werkstoffs AlMg3 z. B. aus einer statistischen Auswertung von Zugversuchen an normierten Zugproben werden in der Regel im Datenblatt des Werkstoffs nicht angegeben. In dieser Arbeit wird der Elastizitätsmodul  $E$  des Balkenwerkstoffs (AlMg3) als konstant angenommen. Der Balken ist bereits in Abschnitt 2.3.2 als ein Euler-Bernoulli Balken aus einem homogenen Werkstoff angenommen.

Aus den Informationen über die Nominalwerte der Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 4.1 und ihre Streuungen werden für jede Eigenschaft einen Kleinst- und Höchstwert ermittelt. Ab hier werden der Kleinst- und Höchstwert der Eigenschaft mit  $\hat{\min}$  und  $\hat{\max}$  gekennzeichnet, siehe Tabelle 4.2.

**Tabelle 4.2:** Grenzwerte der streuenden Aktuator- und Balkeneigenschaften im Arbeitsdiagramm des Stapelaktuators im aktiven System

| Eigenschaft  | Streuung              | Grenzwerte   |                              |
|--|-----------------------|--|------------------------------|
|  |                       | Symbol   | Werte                        |
| Stapelaktuator, Typ 3 9999-62                              |                       |  |                              |
| Blockierkraft $F_B$  | $\pm 10\%$            | $[\check{F}_B; \hat{F}_B]$                         | [810; 990] N                 |
| max. freier Stellweg<br>$\Delta z_{\max}$                  | $\pm 10\%$            | $[\Delta \check{z}_{\max}; \Delta \hat{z}_{\max}]$ | [40,50; 49,50] $\mu\text{m}$ |
| Vorspannkraft $F_v$  | $\pm 10\%$            | $[\check{F}_v; \hat{F}_v]$                         | [13,5; 16,5] N               |
| Balken   |                       |  |                              |
| Länge $l$  | $\pm 0,2 \text{ mm}$  | $[\check{l}; \hat{l}]$                             | [234,8; 235,2] mm            |
| Breite $b$   | $\pm 0,1 \text{ mm}$  | $[\check{b}; \hat{b}]$                             | [29,9; 30,1] mm              |
| Dicke $h_1$  | $\pm 0,05 \text{ mm}$ | $[\check{h}; \hat{h}]$                             | [0,95; 1,05] mm              |
| Dicke $h_2$  | $\pm 0,05 \text{ mm}$ | $[\check{h}_2; \hat{h}_2]$                         | [1,95; 2,05] mm              |
| Dicke $h_3$  | $\pm 0,05 \text{ mm}$ | $[\check{h}_3; \hat{h}_3]$                         | [2,95; 3,05] mm              |
| Angriffspunkt $x_a$ der<br>aktiven Kraft auf dem<br>Balken | $\pm 0,1 \text{ mm}$  | $[\check{x}_a; \hat{x}_a]$                         | [19,9; 22,1] mm              |

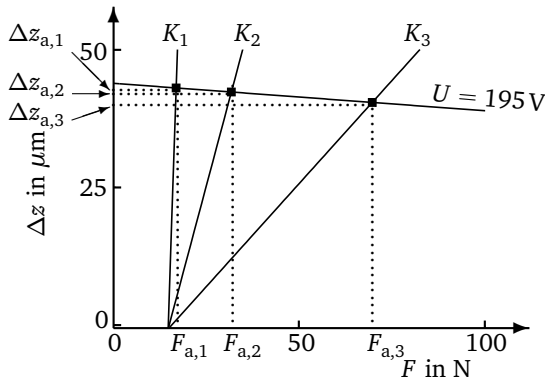
Tabellen 4.1 und 4.2 zeigen Ungewissheit in Form von Kleinst-, Höchst- und Nominalwerten der Aktuator- und Balkeneigenschaften. Die tatsächlichen Werte der Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 4.1 bleiben jedoch unbekannt. Es bleibt ungewiss ob diese tatsächlichen Werte innerhalb der Intervalle aus Kleinst- und Höchstwerten der jeweiligen Eigenschaften liegen, z. B. ob die tatsächliche Blockierkraft des Stapelaktuators vom Typ 3 9999-62 zwischen den Grenzwerten  $\check{F}_B$  und  $\hat{F}_B$  in Tabelle 4.2 liegt.

Die Einflüsse der Ungewissheit in Tabelle 4.1 auf die Stellkräfte und -wege des Stapelaktuators im aktiven System werden bewertet, um mögliche Abweichungen zwischen den tatsächlichen Stellkräften und -wegen  $F_a$  und  $\Delta z_a$  des Stapelaktuators in Abbildung 2.7 und ihren Nominalwerten zu ermitteln. Die nominalen Arbeitspunkte des Stapelaktuators im aktiven System bei unbekannter Unsicherheit, d. h. ohne Streuungen in den Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 4.2, werden für die elektrische Betriebsspannung  $U = 195 \text{ V}$  und die mechanische Vorspannkraft  $F_v = 15 \text{ N}$  zunächst ermittelt. Die elektrische Betriebsspannung  $U = 195 \text{ V}$  und die mechanische Vorspannkraft  $F_v = 15 \text{ N}$  sind

exemplarisch für eine nicht optimale Ausnutzung des Stapelaktuators im aktiven System, siehe das Arbeitsdiagramm in Abbildung 2.8b. Der Stapelaktuator wird nahe seiner maximalen zulässigen Betriebsspannung  $U_{\max} = 200\text{ V}$  betrieben und erzeugt einen Stellweg nahe seinem maximalen freien Stellweg  $\Delta z_{\max} = 45\text{ }\mu\text{m}$ . Im Abschnitt 4.3.3 werden elektrische Betriebsspannung  $U$  und mechanische Vorspannkraft  $F_v$  variiert.

## 4.2 Nominale Arbeitspunkte des Stapelaktuators

Die Nominalwerte der Stellkräfte und -wege bzw. die nominalen Arbeitspunkte des Stapelaktuators in Verbindung mit den drei unterschiedlichen Balkendicken  $h_1 < h_2 < h_3$  im aktiven System werden mit dem Gleichungssystem (2.11) und den Nominalwerten der Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 4.1 für die elektrische Betriebsspannung  $U = 195\text{ V}$  und eine nominale mechanische Vorspannkraft  $F_v = 15\text{ N}$  aus dem kritischen Arbeitspunkt des Stapelaktuators in Abbildung 2.8b ermittelt. Abbildung 4.1 zeigt die drei nominalen Arbeitspunkte des Stapelaktuators für die drei Balkensteifigkeiten  $K_1 < K_2 < K_3$ , die elektrische Betriebsspannung  $U = 195\text{ V}$  und die nominale mechanische Vorspannkraft  $F_v = 15\text{ N}$ .



**Abbildung 4.1:** Nominale Arbeitspunkte des Stapelaktuators mit den Balkensteifigkeiten  $K_1 < K_2 < K_3$  für die Betriebsspannung  $U = 195\text{ V}$  und die Vorspannkraft  $F_v = 15\text{ N}$  aus dem kritischen Arbeitspunkt in Abbildung 2.8b

Die Nominalwerte der Balkeneigenschaften in Tabelle 4.2 und die Gleichung (2.10) führen zu den Balkensteifigkeiten  $K_1 = 0,05\text{ N}/\mu\text{m}$ ,  $K_2 = 0,39\text{ N}/\mu\text{m}$  und

---

$K_3 = 1,33 \text{ N}/\mu\text{m}$ . Die nominalen Stellwege des untersuchten Stapelaktuators bei der elektrischen Betriebsspannung  $U = 195 \text{ V}$ , der mechanischen Vorspannkraft  $F_v = 15 \text{ N}$  und den Balkensteifigkeiten  $K_1 < K_2 < K_3$  betragen  $\Delta z_{a,1} = 43 \mu\text{m}$ ,  $\Delta z_{a,2} = 42,30 \mu\text{m}$  und  $\Delta z_{a,3} = 40,40 \mu\text{m}$ . Diese nominalen Stellwege entsprechen jeweils 96 %, 94 % und 90 % des maximalen freien Stellwegs  $\Delta z_{\max} = 45 \mu\text{m}$  des Stapelaktuators. Die nominalen Stellkräfte  $F_{a,1} = 17,20 \text{ N}$ ,  $F_{a,2} = 31,90 \text{ N}$  und  $F_{a,3} = 69,70 \text{ N}$  sind bei der Betriebsspannung  $U = 195 \text{ V}$  und der Vorspannkraft  $F_v = 15 \text{ N}$  für die Balkensteifigkeiten  $K_1 < K_2 < K_3$  kleiner als die Blockierkraft  $F_B = 900 \text{ N}$  des Stapelaktuators.

Das deterministische Arbeitsdiagramm in Abbildung 4.1 stellt den idealen Fall ohne Unsicherheit dar, in dem nur die Nominalwerte der Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 4.1 im Arbeitsdiagramm berücksichtigt werden. In der Regel weichen die tatsächlichen Werte der Aktuator- und Balkeneigenschaften von ihren Nominalwerten in Tabelle 4.1 aufgrund von Streuung aus Fertigungstoleranzen oder Messungenauigkeiten ab.

Im nächsten Abschnitt werden Worst-Case Analysen zu den Arbeitspunkten des Stapelaktuators im aktiven System vorgestellt, in denen die Grenzwerte der Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 4.1 im Arbeitsdiagramm berücksichtigt werden.

---

### 4.3 Numerische Bewertung mit Worst-Case Analysen

---

Die Worst-Case Analysen zielen der Ermittlung der Einflüsse der Streuungen in den Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 4.2 auf die Stellkräfte  $F_a$  und -wege  $\Delta z_a$  der nominalen Arbeitspunkte in Abbildung 4.1. Sie werden in den beiden folgenden Schritten durchgeführt:

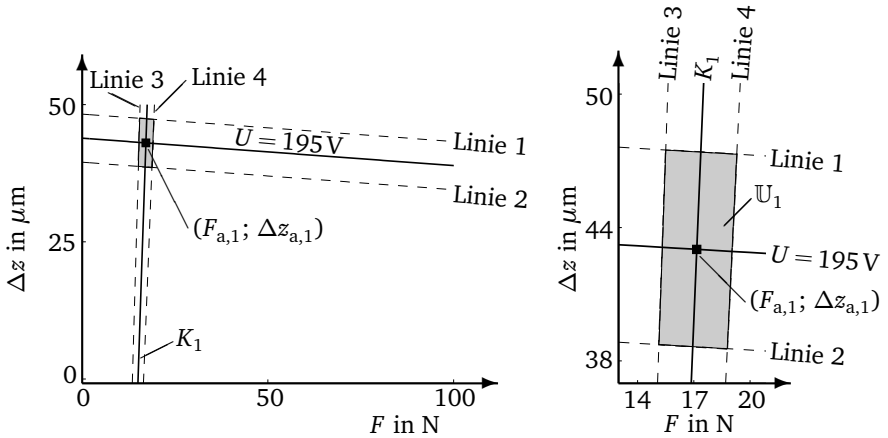
- die Ermittlung der Grenzen für die Kraft-Weg-Kennlinien des Stapelaktuators und Balkens im Arbeitsdiagramm und
- die Ermittlung eines Streuungsbereichs für die Stellkräfte und -wege eines Arbeitspunkts im Arbeitsdiagramm.

In den Worst-Case Analysen wird angenommen, dass alle Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 4.2 entweder ihren jeweiligen Kleinstwert oder Höchstwert besitzen. So beträgt der maximale freie Stellweg des Stapelaktuators entweder  $\Delta \hat{z}_{\max} = 40,5 \mu\text{m}$  oder  $\Delta \check{z}_{\max} = 49,5 \mu\text{m}$ . Aus den Grenzwerten der Aktuator- und Balkeneigenschaften ergeben sich unterschiedliche Kraft-Weg-Kennlinien für den Stapelaktuator und den Balken im Arbeitsdiagramm, die sich von den nominalen Kraft-Weg-Kennlinien in den Gleichungen (2.1) und (2.2) unterscheiden.



### 4.3.1 Grenzen der Kraft-Weg-Kennlinien im Arbeitsdiagramm

Die Grenzwerte der Blockierkraft  $[\check{F}_B; \hat{F}_B]$ , des maximalen freien Stellwegs  $[\Delta\check{z}_{\max}; \Delta\hat{z}_{\max}]$  und der mechanischen Vorspannkraft  $[\check{F}_v; \hat{F}_v]$  des Stapelaktuators, der Breite  $[\check{b}; \hat{b}]$  und Dicke  $[\check{h}; \hat{h}]$  eines Balkens und des Angriffspunkts der Kraft  $F_a$  auf dem Balken  $[\check{x}_a; \hat{x}_a]$  führen zur maximalen und minimalen Kraft-Weg-Kennlinien des Stapelaktuators und der drei Balken im Arbeitsdiagramm. Abbildung 4.2 zeigt exemplarisch für den nominalen Arbeitspunkt  $(F_{a,1}; \Delta z_{a,1})$  des Stapelaktuators in Abbildung 4.1, die unterschiedlichen Kraft-Weg-Kennlinien des Stapelaktuators und des Balkens, die aus den Grenzwerten der Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 4.2 resultieren.



**Abbildung 4.2:** Grenzen der Kraft-Weg-Kennlinien des Stapelaktuators und der Balkensteifigkeit  $K_1$  im Arbeitsdiagramm mit dem nominalen Arbeitspunkt (■) für die Betriebsspannung  $U = 195 \text{ V}$  und die Vorspannkraft  $F_v = 15 \text{ N}$

Die Linie 1 zeigt die maximale Kraft-Weg-Kennlinie des Stapelaktuators, die folgendermaßen ermittelt wird:

$$\Delta\hat{z}(F, U) = \Delta\hat{z}_{\max} \left( -\frac{F}{\hat{F}_B} + \frac{U}{U_{\max}} \right). \quad (4.1)$$

Die Linie 2 zeigt die minimale Kraft-Weg-Kennlinie des Stapelaktuators, die folgendermaßen ermittelt wird:

$$\Delta\check{z}(F, U) = \Delta\check{z}_{\max} \left( -\frac{F}{\check{F}_B} + \frac{U}{U_{\max}} \right). \quad (4.2)$$

Die Linie 3 zeigt die maximale Kraft-Weg-Kennlinie des Balkens, die folgendermaßen ermittelt wird:

$$\Delta\hat{z}(F) = \frac{1}{\check{K}}(F - \check{F}_v) - \frac{\check{F}_v}{\check{F}_B} \Delta\hat{z}_{\max}, \quad (4.3)$$

mit der minimalen lokalen Steifigkeit des Balkens

$$\check{K} = \frac{E\check{b}\check{h}^3}{4\check{x}_a^3}. \quad (4.4)$$

Die Linie 4 zeigt die minimale Kraft-Weg-Kennlinie des Balkens, die folgendermaßen ermittelt wird:

$$\Delta\check{z}(F) = \frac{1}{\hat{K}}(F - \hat{F}_v) - \frac{\hat{F}_v}{\hat{F}_B} \Delta\check{z}_{\max}, \quad (4.5)$$

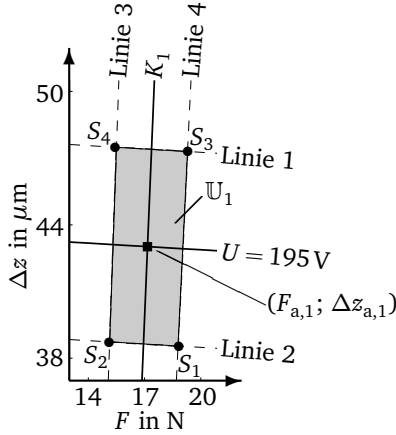
mit der maximalen lokalen Steifigkeit des Balkens

$$\hat{K} = \frac{E\hat{b}\hat{h}^3}{4\check{x}_a^3}. \quad (4.6)$$

Die Grenzen der Kraft-Weg-Kennlinien des Balkens beeinflussen den Abstand zwischen den Linien 3 und 4 und somit die mögliche Streuung in der Stellkraft  $F_a$  eines Arbeitspunkts. Die Grenzen der Kraft-Weg-Kennlinien des Stapelaktuators beeinflussen den Abstand zwischen den Linie 1 und 2 und somit die mögliche Streuung in dem Stellweg  $\Delta z_a$  eines Arbeitspunkts.

### 4.3.2 Unsicherheitsregion im Arbeitsdiagramm

Die minimalen und maximalen Kraft-Weg-Kennlinien des Stapelaktuators und des Balkens bilden in Abbildung 4.2 eine Region um den nominalen Arbeitspunkt des Stapelaktuators  $(F_{a,1}; \Delta z_{a,1})$ . Diese Region wird in dieser Arbeit als **Unsicherheitsregion**  $\mathbb{U}$  bezeichnet. Abbildung 4.3 zeigt exemplarisch für die Balkensteifigkeit  $K_1$  die Unsicherheitsregion  $\mathbb{U}_1$  um den nominalen Arbeitspunkt  $(F_{a,1}; \Delta z_{a,1})$ .



**Abbildung 4.3:** Unsicherheitsregion mit Flächeninhalt  $\mathbb{U}_1 = 32,6 \text{ N}\mu\text{m}$  mit ihren Eckpunkten  $S_1, S_2, S_3$  und  $S_4$  (•) für die Balkensteifigkeit  $K_1$

Der Schnittpunkt  $S_1$  zwischen den minimalen Kraft-Weg-Kennlinien des Stapelaktuators und Balkens (Linie 2) und (Linie 4) besitzt die folgenden Koordinaten im Arbeitsdiagramm

$$(F_1; \Delta z_1) = \left( \frac{\frac{\Delta \tilde{z}_{\max}}{\frac{1}{\hat{K}} + \frac{\tilde{F}_v}{\hat{F}_B}}}{\left( \frac{U}{U_{\max}} \right) + \hat{F}_v}; \quad \frac{1}{\hat{K}}(F_1 - \hat{F}_v) - \frac{\hat{F}_v}{\hat{F}_B} \Delta \tilde{z}_{\max} \right). \quad (4.7)$$

Der Schnittpunkt  $S_2$  zwischen der minimalen und maximalen Kraft-Weg-Kennlinien des Stapelaktuators und Balkens (Linie 2) und (Linie 3) besitzt die folgenden Koordinaten im Arbeitsdiagramm

$$(F_2; \Delta z_2) = \left( \frac{\Delta \check{z}_{\max}}{\frac{1}{\check{K}} + \frac{\Delta \check{z}_{\max}}{\check{F}_B}} \left( \frac{U}{U_{\max}} \right) + \check{F}_v; \quad \frac{1}{\check{K}}(F_2 - \check{F}_v) - \frac{\check{F}_v}{\check{F}_B} \Delta \check{z}_{\max} \right). \quad (4.8)$$

Der Schnittpunkt  $S_3$  zwischen der maximalen und minimalen Kraft-Weg-Kennlinien des Stapelaktuators und Balkens (Linie 1) und (Linie 4) besitzt die folgenden Koordinaten im Arbeitsdiagramm

$$(F_3; \Delta z_3) = \left( \frac{\Delta \hat{z}_{\max}}{\frac{1}{\hat{K}} + \frac{\Delta \hat{z}_{\max}}{\hat{F}_B}} \left( \frac{U}{U_{\max}} \right) + \hat{F}_v; \quad \frac{1}{\hat{K}}(F_3 - \hat{F}_v) - \frac{\hat{F}_v}{\hat{F}_B} \Delta \hat{z}_{\max} \right). \quad (4.9)$$

Der Schnittpunkt  $S_4$  zwischen den maximalen Kraft-Weg-Kennlinien des Stapelaktuators und Balkens (Linie 1) und (Linie 3) besitzt die folgenden Koordinaten im Arbeitsdiagramm

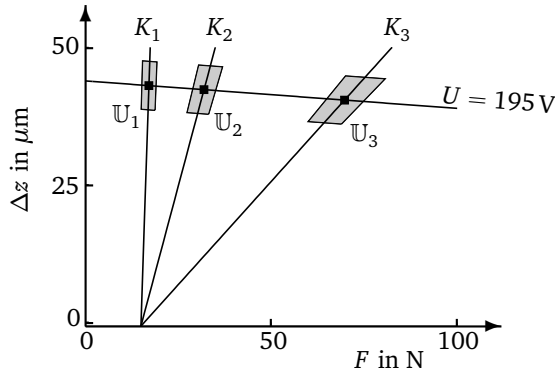
$$(F_4; \Delta z_4) = \left( \frac{\Delta \hat{z}_{\max}}{\frac{1}{\hat{K}} + \frac{\Delta \hat{z}_{\max}}{\hat{F}_B}} \left( \frac{U}{U_{\max}} \right) + \hat{F}_v; \quad \frac{1}{\hat{K}}(F_4 - \hat{F}_v) - \frac{\hat{F}_v}{\hat{F}_B} \Delta \hat{z}_{\max} \right). \quad (4.10)$$

Der Flächeninhalt einer **Unsicherheitsregion**  $\mathbb{U}$  wird aus den Koordinaten der Schnittpunkte  $S_1, S_2, S_3$  und  $S_4$  folgendermaßen numerisch ermittelt [10],

$$\mathbb{U} = \frac{1}{2} [(F_1 - F_2)(\Delta z_1 + \Delta z_2) + (F_2 - F_3)(\Delta z_2 + \Delta z_3) + \dots + (F_4 - F_1)(\Delta z_4 + \Delta z_1)], \quad (4.11)$$

Eine **Unsicherheitsregion**  $\mathbb{U}$  beschreibt einen Bereich im Arbeitsdiagramm, in dem ein Arbeitspunkt des Stapelaktuators liegen kann. Je größer die Unsicherheitsregion  $\mathbb{U}$  um einen nominalen Arbeitspunkt ist, umso größer werden die Abweichungen in den numerischen Stellkräften und -wegen des Stapelaktuators, die von den Streuungen in den Aktuator- und Balkeneigenschaften verursacht werden.

Abbildung 4.4 zeigt die drei Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_1$ ,  $\mathbb{U}_2$  und  $\mathbb{U}_3$  um die drei abgeschätzten nominalen Arbeitspunkte  $(F_{a,1}; \Delta z_{a,1})$ ,  $(F_{a,2}; \Delta z_{a,2})$  und  $(F_{a,3}; \Delta z_{a,3})$  des Stapelaktuator für eine elektrische Betriebsspannung  $U = 195 \text{ V}$ , eine nominale Vorspannkraft  $F_v = 15 \text{ N}$  und die nominalen Balkensteifigkeiten  $K_1 < K_2 < K_3$ .



**Abbildung 4.4:** Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_1$ ,  $\mathbb{U}_2$  und  $\mathbb{U}_3$  um die nominalen Arbeitspunkte (■) für die Balkensteifigkeiten  $K_1 < K_2 < K_3$ , die elektrische Spannung  $U = 195 \text{ V}$  und die Vorspannkraft  $F_v = 15 \text{ N}$  aus dem kritischen Arbeitspunkt in Abbildung 2.8b

Die Flächeninhalte der Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_1$ ,  $\mathbb{U}_2$  und  $\mathbb{U}_3$  betragen  $32,6 \text{ N}\mu\text{m}$ ,  $53,2 \text{ N}\mu\text{m}$  und  $85,4 \text{ N}\mu\text{m}$ . Sie werden mit einer steigenden Balkensteifigkeit  $K_1 = 0,05 \text{ N}/\mu\text{m}$ ,  $K_2 = 0,39 \text{ N}/\mu\text{m}$  und  $K_3 = 1,33 \text{ N}/\mu\text{m}$  größer mit  $\mathbb{U}_2/\mathbb{U}_1 \approx 1,6$  und  $\mathbb{U}_3/\mathbb{U}_1 \approx 2,6$ . Die Vergrößerung in den Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_1$ ,  $\mathbb{U}_2$  und  $\mathbb{U}_3$  wird durch die Erhöhung der nominalen Balkensteifigkeit von  $K_1$  bis  $K_3$  verursacht, weil alle drei Unsicherheitsregionen mit den gleichen Streuungen von  $\pm 10\%$  in der Blockierkraft  $F_B$  und  $\pm 10\%$  im maximalen freien Stellweg  $\Delta z_{\max}$  des Stapelaktuator, von  $\pm 0,2 \text{ mm}$  in der Breite  $b$  und von  $\pm 0,05 \text{ mm}$  in den Dicken  $h_1$ ,  $h_2$  und  $h_3$  der drei Balken, von  $\pm 10\%$  im Angriffspunkt  $x_a$  der aktiven Kraft auf den Balken und von  $\pm 10\%$  in der mechanischen Vorspannkraft  $F_v$  ermittelt werden, siehe Tabelle 4.2.

Tabelle 4.3 fasst die Ergebnisse der Worst-Case Analysen zu den Arbeitspunkten des Stapelaktuator im aktiven System für die Betriebsspannung  $U = 195 \text{ V}$ , die Vorspannkraft  $F_v = 15 \text{ N}$  und die drei Balkensteifigkeiten  $K_1 < K_2 < K_3$  zusammen.

**Tabelle 4.3:** Grenzwerte der Balkensteifigkeiten  $K_1 < K_2 < K_3$ , der Stellkräfte und -wege der Arbeitspunkte bei  $U = 195 \text{ V}$  mit den Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_1 < \mathbb{U}_2 < \mathbb{U}_3$  aus den Worst-Case Analysen

| Eigenschaft   | Nominalwert      | Ungewissheit                                     |
|---|------------------|--|
| Balkensteifigkeit $K_n$ in $\text{N}/\mu\text{m}$           | $K_n$            | $[\check{K}_n; \hat{K}_n]$                       |
| $n = 1$   | 0,05             | [0,04; 0,06]                                     |
| $n = 2$   | 0,39             | [0,36; 0,43]                                     |
| $n = 3$   | 1,33             | [1,24; 1,42]                                     |
| Stellkraft $F_{a,n}$ in N                                   | $F_{a,n}$        | $[\check{F}_{a,n}; \hat{F}_{a,n}]$               |
| $n = 1$   | 17,20            | [15,10; 19,30]                                   |
| $n = 2$   | 31,90            | [27,40; 37]                                      |
| $n = 3$   | 69,70            | [60; 80,60]                                      |
| Stellweg $\Delta z_{a,n}$ in $\mu\text{m}$                  | $\Delta z_{a,n}$ | $[\Delta \check{z}_{a,n}; \Delta \hat{z}_{a,n}]$ |
| $n = 1$   | 43               | [38,60; 47,50]                                   |
| $n = 2$   | 42,30            | [37,80; 46,70]                                   |
| $n = 3$   | 40,40            | [36; 44,8]                                       |
| Unsicherheitsregion $\mathbb{U}_n$ in $\text{N}\mu\text{m}$ | -                | $\mathbb{U}_n$                                   |
| $n = 1$   | -                | 32,6   |
| $n = 2$   | -                | 53,2   |
| $n = 3$   | -                | 85,4   |

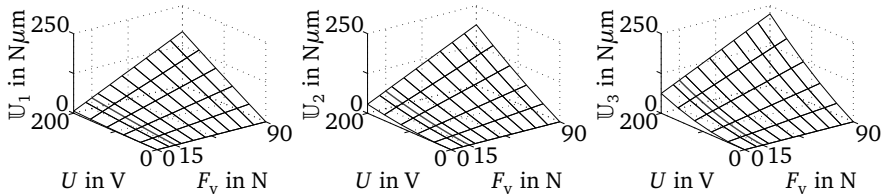
Die Grenzwerte der Balkensteifigkeiten  $[\check{K}_n; \hat{K}_n]$  in Tabelle 4.2 werden mit den Gleichungen (4.4) und (4.6) ermittelt und sie streuen mit ca.  $\pm 20\%$ ,  $\pm 9\%$  und  $\pm 6\%$  um ihren nominalen Werte  $K_1 = 0,05 \text{ N}/\mu\text{m}$ ,  $K_2 = 0,39 \text{ N}/\mu\text{m}$  und  $K_3 = 1,33 \text{ N}/\mu\text{m}$  aus der Gleichung (2.10). Die Kleinst- und Höchstwerte der Stellkräfte und -wege aller Eckpunkte  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  und  $S_4$  einer Unsicherheitsregion  $\mathbb{U}_n$  werden als die Grenzwerte der Stellkräfte und -wege  $[F_{a,n}; \hat{F}_{a,n}]$  und  $[\Delta \check{z}_{a,n}; \Delta \hat{z}_{a,n}]$  in Tabelle 4.3 angegeben. Keine Grenzwerte werden für die Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_1$ ,  $\mathbb{U}_2$  und  $\mathbb{U}_3$  angegeben, weil sie per Definition Streuungsbereiche der drei nominalen Arbeitspunkte des Stapelaktuators im Arbeitsdiagramm darstellen. Die maximalen Werte der Stellwege  $\Delta \hat{z}_{a,1} = 47,5 \mu\text{m}$  und  $\Delta \hat{z}_{a,2} = 46,7 \mu\text{m}$  sind  $\approx 5,5\%$  und  $\approx 3,7\%$  größer als den Nominalwert des maximalen freien Stellwegs des Stapelaktuators  $\Delta z_{\max} = 45 \mu\text{m}$ . Die Streuungen in den Stellkräften und -wegen werden mit einer zunehmender nominalen Balkensteifigkeit  $K$  ebenfalls größer.

Die Worst-Case Analysen liefern Grenzwerte der Stellkräfte und -wege  $[\check{F}_{a,n}; \hat{F}_{a,n}]$  und  $[\Delta\check{z}_{a,n}; \Delta\hat{z}_{a,n}]$  und der Balkensteifigkeiten  $[\check{K}_n; \hat{K}_n]$  sowie die Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_n$ , mit  $n=1,2,3$ . Damit liegt Ungewissheit in der Wirkung der Streuungen in den Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 4.2 auf die Arbeitspunkte des Stapelaktuator im aktiven System vor.

Die Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_1$ ,  $\mathbb{U}_2$  und  $\mathbb{U}_3$  in Tabelle 4.3 gelten nur für die Vorspannkraft  $F_v = 15 \text{ N}$  und die Betriebsspannung  $U = 195 \text{ V}$ . Beide Parameter des Arbeitsdiagramms gehören zum kritischen Arbeitspunkt des Stapelaktuator im untersuchten aktiven System, siehe die Abbildungen 2.7 und 2.8. Unterschiedliche Vorspannkraften und Betriebsspannungen sind in aktiven Systemen möglich. Die Abhängigkeiten zwischen den Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_1 < \mathbb{U}_2 < \mathbb{U}_3$ , der Betriebsspannung  $U$  und der Vorspannkraft  $F_v$  des Stapelaktuator in Verbindung mit den Balkensteifigkeiten  $K_1 < K_2 < K_3$  werden im nächsten Abschnitt untersucht.

### 4.3.3 Entwicklung der Unsicherheitsregionen

Die Abhängigkeiten zwischen den Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_1$ ,  $\mathbb{U}_2$  und  $\mathbb{U}_3$ , der elektrischen Betriebsspannung  $U$  und der Vorspannkraft  $F_v$  am Stapelaktuator sind in Abbildung 4.5 dargestellt.

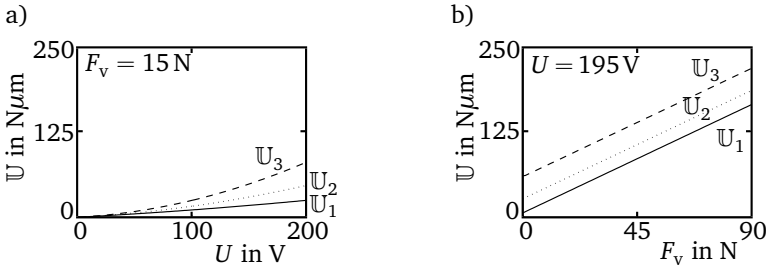


**Abbildung 4.5:** Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_1 < \mathbb{U}_2 < \mathbb{U}_3$  in Abhängigkeit der Betriebsspannung  $U$  und der Vorspannkraft  $F_v$  für die Balkensteifigkeiten  $K_1 < K_2 < K_3$

Die Verläufe der Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_1$ ,  $\mathbb{U}_2$  und  $\mathbb{U}_3$  bei variierender Betriebsspannung  $U$  und Vorspannkraft  $F_v$  sind unterschiedlich voneinander und die Flächeninhalte der Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_1$ ,  $\mathbb{U}_2$  und  $\mathbb{U}_3$  werden mit zunehmender Betriebsspannung und Vorspannkraft größer. Die Betriebsspannung  $U$  variiert zwischen dem Wert 0 und der maximalen zulässigen Betriebsspannung  $U_{\max} = 200 \text{ V}$  des Stapelaktuator. Die Vorspannkraft  $F_v$  variiert zwischen 0 und 90 N. Der Maximalwert für die Vorspannkraft  $F_v$  entspricht einem Zehntel der

Blockierkraft  $F_B = 900 \text{ N}$  des Stapelaktuators. Das gleiche Verhältnis zwischen der mechanischen Vorspannkraft und der nominalen Blockierkraft des Stapelaktuators (*PSt 150/160/10VS15*) wird im aktiven Balkensystem verwendet [76].

Abbildung 4.6 zeigt die Verläufe der Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_1$ ,  $\mathbb{U}_2$  und  $\mathbb{U}_3$  für eine konstante Vorspannkraft  $F_v = 15 \text{ N}$  und eine konstante Betriebsspannung  $U = 195 \text{ V}$ .



**Abbildung 4.6:** Verläufe der Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_1$ ,  $\mathbb{U}_2$  und  $\mathbb{U}_3$  in a) für eine variierende Betriebsspannung  $U$  und  $F_v = 15 \text{ N}$  und in b) für eine variierende Vorspannkraft  $F_v$  und  $U = 195 \text{ V}$ , vgl. mit Abbildung 4.5

Die Verläufe einer Unsicherheitsregion  $\mathbb{U}$  bei variierender Betriebsspannung  $U$  und konstanter Vorspannkraft  $F_v$  zeigt einen nichtlinear steigenden Verlauf, siehe Abbildung 4.6a. Eine Änderung der Betriebsspannung  $U$  von 0 bis  $200 \text{ V}$  bei der konstanten Vorspannkraft  $F_v = 15 \text{ N}$  bewirkt eine Steigerung von 0 bis  $25 \text{ N}\mu\text{m}$ , von 0 bis  $46 \text{ N}\mu\text{m}$  und von 0 bis  $80 \text{ N}\mu\text{m}$  der Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_1$ ,  $\mathbb{U}_2$  und  $\mathbb{U}_3$ . Die Verläufe einer Unsicherheitsregion  $\mathbb{U}$  bei variierender Vorspannkraft  $F_v$  und konstanter Betriebsspannung  $U$  zeigen einen linear steigenden Verlauf, siehe Abbildung 4.6b.

Eine Änderung der mechanischen Vorspannkraft  $F_v$  von 0 bis  $90 \text{ N}$  bei einer konstanten elektrischen Spannung  $U = 195 \text{ V}$  bewirkt eine Steigerung von 6 bis  $164 \text{ N}\mu\text{m}$ , von 27 bis  $185 \text{ N}\mu\text{m}$  und von 59 bis  $217 \text{ N}\mu\text{m}$  der Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_1$ ,  $\mathbb{U}_2$  und  $\mathbb{U}_3$ . Die Variationen der Vorspannkraft  $F_v$  verursachen eine größere Steigerung der Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_1$ ,  $\mathbb{U}_2$  und  $\mathbb{U}_3$  im Vergleich zu den Variationen in der elektrischen Betriebsspannung  $U$ . Dieser Sachverhalt wird dadurch begründet, dass die mechanische Vorspannkraft  $F_v$  einen direkten Einfluss auf die Kraft-Weg-Kennlinie des Balkens im Arbeitsdiagramm nach den Gleichungen (4.3) und (4.5) hat, während die Betriebsspannung  $U$  vor allem die Lage der Kraft-Weg-Kennlinie des Stapelaktuators im Arbeitsdiagramm beeinflusst, siehe Abbildung 4.3.



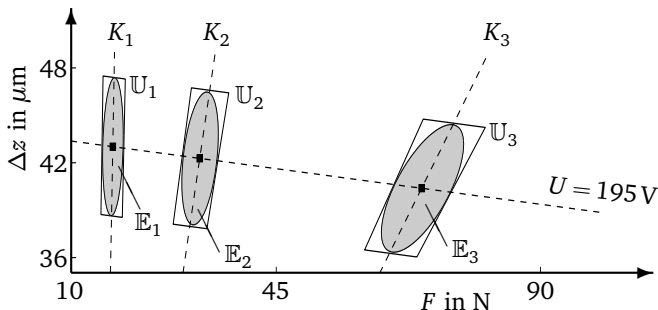
Abbildung 4.6 zeigt, dass der Flächeninhalt einer Unsicherheitsregion  $\mathbb{U}$  nicht nur von den Streuungen in den Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 4.1 abhängig ist. Die elektrische Betriebsspannung  $U$  und die Vorspannkraft  $F_v$  des Stapelaktuators haben einen starken Einfluss auf die Inhaltsfläche einer Unsicherheitsregion  $\mathbb{U}$ .

#### 4.3.4 Angenommene elliptische Unsicherheitsregionen

Die Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}$  in Abbildung 4.4 basieren darauf, dass die Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 4.2 entweder ihre Höchst- oder Kleinstwerte besitzen. Diese Grenzwerte führen in der Regel zu konservativen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}$ . In [61] werden innerhalb von eckigen Unsicherheitsregionen, sogenannte „cube“, konvexe und kurvige Unsicherheitsregionen definiert, die zu weniger konservativen Ergebnissen in der Wirkung von Unsicherheit in der Simulation dynamischer Systeme mit der Methode der finiten Elemente führen.

In dieser Arbeit wird angenommen, dass die weniger konservative Unsicherheitsregionen innerhalb der viereckigen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}$  in Abbildung 4.4 eine elliptische Form besitzen. Die Auswahl einer elliptischen Form für die weniger konservativen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{E}$  basiert zum einen darauf, dass der Flächeninhalt einer Ellipse aus den konservativen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}$  zu ermitteln sind. Zum anderen zeigt eine elliptische Unsicherheitsregion  $\mathbb{E}$ , dass es eine geringe Wahrscheinlichkeit dafür gibt, dass ein Arbeitspunkt in den Eckpunkten  $S_k$  einer konservativen Unsicherheitsregion  $\mathbb{U}$  liegt. Weitere Formen für die weniger konservativen Unsicherheitsregionen sind auch möglich [61].

Abbildung 4.7 zeigt die Ellipsen  $\mathbb{E}$  innerhalb der Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}$ , die nach dem Ansatz in [61] gebildet werden können.

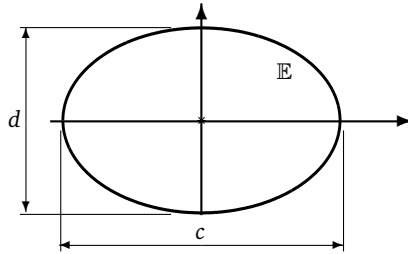


**Abbildung 4.7:** Elliptische Unsicherheitsregionen innerhalb des Arbeitsdiagramms

Die Ecken der konservativen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2$  und  $\mathbb{U}_3$  werden von den Ellipsen  $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$  und  $\mathbb{E}_3$  mit grauer Farbe in Abbildung 4.7 ausgeschlossen. Die Inhaltsflächen der Ellipsen in Abbildung 4.7 sind folgendermaßen zu ermitteln

$$\mathbb{E} = \pi c d \quad (4.12)$$

mit der Konstante  $\pi \approx 3,14159$  und den Hauptachsen  $c$  und  $d$  einer beliebigen Ellipse in Abbildung 4.8 [10].



**Abbildung 4.8:** Beispiel einer Ellipse mit der Inhaltsfläche  $\mathbb{E}$

Die Halbachsen  $c$  und  $d$  der Ellipsen  $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$  und  $\mathbb{E}_3$  in Abbildung 4.7 ergeben sich aus der Abmessungen der konservativen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2$  und  $\mathbb{U}_3$  der Worst-Case Analysen. Die Inhaltsflächen der Ellipsen betragen  $\mathbb{E}_1 = 23,6 \text{ N}\mu\text{m}$ ,  $\mathbb{E}_2 = 38,1 \text{ N}\mu\text{m}$  und  $\mathbb{E}_3 = 63,7 \text{ N}\mu\text{m}$  und sie sind etwa 27,6%, 28,4% und 25,4% kleiner als die konservativen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_1$  und  $\mathbb{U}_3$  in Tabelle 4.3. Dadurch werden die extreme Werte der Stellkräfte und -wege eines Stapelaktuators im aktiven System in Tabelle 4.3 vermieden.

Die Verteilung eines Arbeitspunkts innerhalb einer Unsicherheitsregion  $\mathbb{U}$  im Arbeitsdiagramm sowie die tatsächliche Form von weniger konservativen Unsicherheitsregionen können mit den Worst-Case Analysen nicht ermittelt werden, weil sie per Definition nur die Grenzwerte der Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 4.1 berücksichtigen.

Im nächsten Abschnitt dieses Kapitels wird die Verteilung der Arbeitspunkte innerhalb einer Unsicherheitsregion mithilfe von Monte Carlo-Simulationen numerisch ermittelt.

---

## 4.4 Numerische Bewertung mit Monte Carlo-Simulationen

---

Die Verteilungen der Arbeitspunkte im Arbeitsdiagramm in Abhängigkeit der Verteilungsfunktionen der Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 4.2 für die Betriebsspannung  $U = 195\text{ V}$  und die Vorspannkraft  $F_v = 15\text{ N}$  aus dem kritischen Arbeitspunkt eines Stapelaktuators im untersuchten aktiven System in Abbildung 2.8 werden mit in dieser Arbeit mit MCS ermittelt. Folgende Annahmen werden in dieser Arbeit für die MCS berücksichtigt:

- dass die streuenden Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 4.2 stochastisch unabhängig voneinander sind [32] und
- dass die streuenden Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 4.1 zwischen ihren Kleinst- und Höchstwerten statistisch verteilt sind.

Die Eingangsgrößen der MCS sind die Nominal- und Grenzwerte der streuenden Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 4.2 mit angenommenen Verteilungsfunktionen. Ausgangsgrößen der MCS sind die Stellkräfte  $F_a$  und -wege  $\Delta z_a$  eines Arbeitspunkts, die mit dem Gleichungssystem (2.11) in Kapitel 2 deterministisch ermittelt werden. Die MCS zu den Arbeitspunkten des Stapelaktuators für die Balkensteifigkeiten  $K_1 < K_2 < K_3$  beinhalten die folgenden Schritte:

1. eine Stichprobengenerierung bzw. eine numerische Generierung von Pseudozufallswerten [32] für die streuenden Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 4.2,
2. eine numerische Ermittlung der Stellkräfte und -wege durch das Einsetzen der numerisch generierten Pseudozufallswerte in das Gleichungssystem (2.11) des deterministischen Arbeitsdiagramms und
3. eine statistische Auswertung der numerischen Ergebnisse.

---

### 4.4.1 Stichprobengenerierung

---

Eine Anzahl  $N = 10.000$  von Eigenschaftswerten wird für jede Aktuator- und Balkeneigenschaft in Tabelle 4.2 mit angenommener Normal- und Gleichverteilung als Pseudozufallszahlen numerisch generiert, so dass  $N = 10.000$  deterministische Berechnungen im nächsten Schritt der MCS durchgeführt werden können. Pseudozufallszahlen sind Zufallszahlen, die mit deterministischen Zufallszahlengeneratoren basierend auf programmierte Algorithmen wie der lineare Kongruenz-generator (Modulo-Generator) erzeugt werden [57].

Die Hohe Anzahl  $N$  führt zu einem niedrigen Fehler zwischen den unbekannten und numerisch abgeschätzten Erwartungswerten der Stellkräfte und -wege des Stapelaktuators aus den MCS, da dieser Fehler invers proportional zum Quadrat der Stichprobenanzahl ist. Eine hohe Stichprobenanzahl erhöht die Konvergenz der MCS, d. h. die ermittelten Erwartungswerte und Standardabweichungen z. B. der Stellkräfte und -wege zeigen bei noch höheren Stichprobenanzahlen keine nennenswerte Änderungen mehr [83, 25, 72]. Die optimale Stichprobenanzahl ist vom Untersuchungsziel und numerischen Modell mit seinen Parametern abhängig.

*Auswahl der Verteilungsfunktionen für die Aktuator- und Balkeneigenschaften*

Die Blockierkraft  $F_B$  und der maximale freie Stellweg  $\Delta z_{\max}$  des Stapelaktuators sind normalverteilt. Diese Erkenntnis ist aus der experimentellen Charakterisierung von Stapelaktuatoren vom Typ 3 9999-62 in [78] zu entnehmen.

Für die unbekannten Verteilungen der mechanischen Vorspannkraft  $F_v$ , des Angriffspunkts  $x_a$  der aktiven Kraft auf die Balken, der Breite  $b$  und der Dicken  $h_1 < h_2 < h_3$  der Balken werden Normal- und Gleichverteilungen angenommen. Die allgemeingültige Form einer stetigen Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable  $X$  lautet

$$V(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x v(\zeta) d\zeta, \quad (4.13)$$

mit  $P(X \leq x)$  der Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsvariable  $X$  kleiner oder gleich als der Wert  $x$  ist,  $v(\zeta)$  der Dichtefunktion von  $V(x)$  und  $\zeta$  einer Integrationsveränderlichen [10]. Die Dichtefunktion einer Normalverteilung lautet

$$v(\zeta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\zeta - \bar{X})^2}{2\sigma^2}}, \quad (4.14)$$

und die Dichtefunktion einer Gleichverteilung lautet

$$v(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{\hat{X} - \check{X}} & \text{für } \check{X} \leq \zeta \leq \hat{X} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (4.15)$$

mit  $\bar{X}$  dem Erwartungswert oder Mittelwert,  $\sigma$  der Standardabweichung der Normalverteilung  $N(\bar{X}, \sigma)$ ,  $\check{X}$  und  $\hat{X}$  dem Kleinst- und Höchstwert der Zufallsvariable  $X$  für die Gleichverteilung  $G(\check{X}, \hat{X})$  [10]. Die Normal- und Gleichverteilung sind symmetrisch. Dadurch können sie die symmetrischen Streuungen der Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 4.2 wie  $\pm 10\%$  Streuung um den Nominalwert

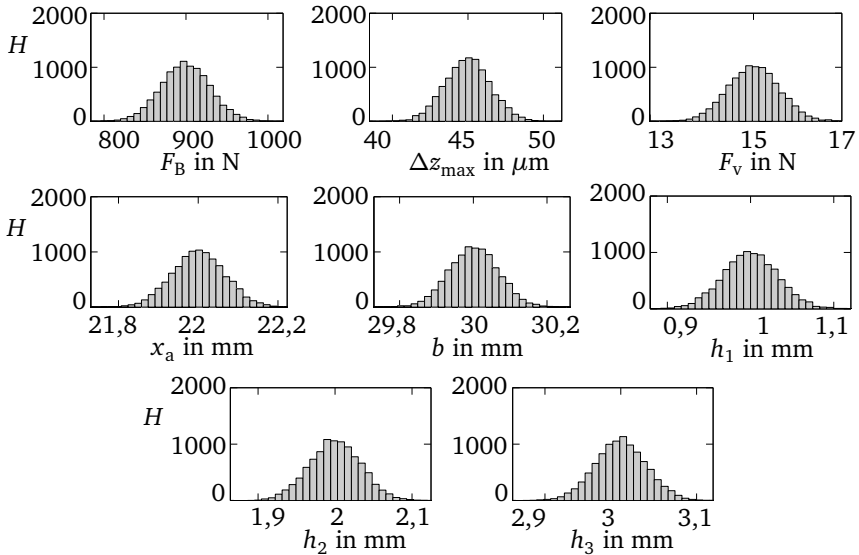
der mechanischen Vorspannkraft  $F_v = 15 \text{ N}$  beschreiben. Die Nominalwerte der Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 4.2 werden als die Mittelwerte der jeweiligen Normalverteilungen  $N(\mu, \sigma)$  mit den Standardabweichungen

$$\sigma_{\tilde{\mu}} = \frac{\hat{\mu} - \tilde{\mu}}{6} \quad (4.16)$$

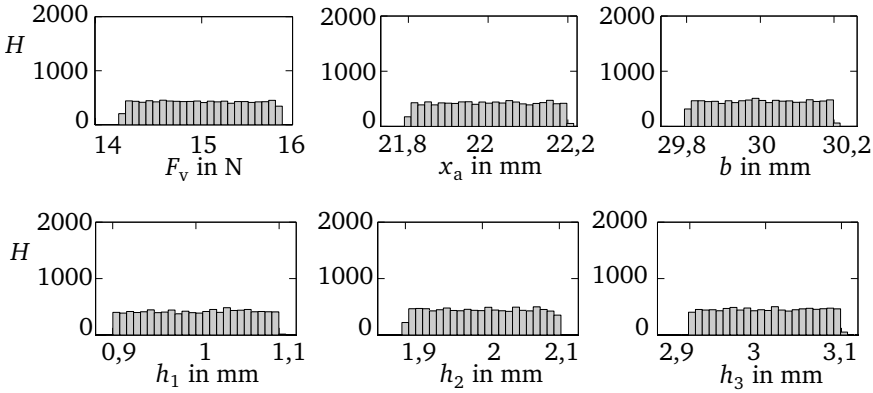
und den Grenzwerten  $\tilde{\mu}$  und  $\hat{\mu}$  der jeweiligen Aktuator- bzw. Balkeneigenschaft  $\mu$  in Tabelle 4.2 angenommen. Mit der Standardabweichung  $\sigma_{\tilde{\mu}}$  liegen  $\approx 99,6\%$  aller numerisch generierten Eigenschaftswerte in einem Bereich von  $\pm 3\sigma_{\tilde{\mu}}$  um den Mittelwert der Aktuator- und Balkeneigenschaft. Die Gleichverteilungen  $G(\tilde{\mu}, \hat{\mu})$  werden aus den Grenzwerten  $\tilde{\mu}$  und  $\hat{\mu}$  der Aktuator- Balkeneigenschaften in Tabelle 4.2 ermittelt.

Andere Verteilungen wie die Exponential- und Weibull-Verteilung eignen sich z. B. für Lebensdauerverteilung in der Zuverlässigkeitstheorie, so dass hier nicht berücksichtigt werden [57, 82].

Die Werte der streuenden Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 4.2 werden mit den MATLAB<sup>®</sup> Funktionen „randn.m“ und „rand.m“ [55] für die angenommenen Normal- und Gleichverteilungen numerisch erzeugt, siehe die Abbildungen 4.9 und 4.10.



**Abbildung 4.9:** Histogramme der numerisch generierten Aktuator- und Balkeneigenschaften mit angenommenen Normalverteilungen



**Abbildung 4.10:** Histogramme der numerisch generierten Aktuator- und Balkeneigenschaften mit angenommenen Gleichverteilungen

#### 4.4.2 Deterministische Berechnungen

Die numerisch simulierten Werte der Aktuator- und Balkeneigenschaften in den Abbildungen 4.9 und 4.10 werden in das Gleichungssystem (2.11) des Arbeitsdiagramms eingesetzt, um die resultierenden Stellkräfte und -wege  $F_a(U)$  und  $\Delta z_a(U)$  deterministisch zu ermitteln.

Für die unbekannten Verteilungen der Vorspannkraft  $F_v$ , des Angriffspunkts  $x_a$  der aktiven Kraft auf dem Balken, der Balkenbreite  $b$  und -dicke  $h$  werden entweder eine Normal- oder eine Gleichverteilung angenommen. Die Kombination der angenommenen Normal- und Gleichverteilungen der Aktuator- und Balkeneigenschaften ergibt 16 unterschiedliche Fälle. Die Zahl der untersuchten Fälle ergibt sich aus den möglichen Kombinationen der angenommenen Normal- und Gleichverteilungen der Vorspannkraft  $F_v$ , des Angriffspunkts  $x_a$  der aktiven Kraft auf dem Balken, der Balkenbreite  $b$  und -dicke  $h$ . In jedem untersuchten Fall werden jeweils 10.000 unterschiedliche Werte für die Blockierkraft  $F_B$ , den maximalen freien Stellweg  $\Delta z_{\max}$ , die Vorspannkraft  $F_v$ , den Angriffspunkt  $x_a$  der Kraft  $F_a$  auf den Balken, die Balkenbreite  $b$  und -dicke  $h$  ( $h_1 < h_2 < h_3$ ) aus den Abbildungen 4.9 und 4.10 mit den entsprechenden Verteilungen ausgewählt und ins Gleichungssystem (2.11) eingesetzt. Tabelle 4.4 zeigt die Kombinationen der Aktuator- und Balkeneigenschaften im Arbeitsdiagramm mit bekannter und unbekannter Normal- und Gleichverteilungen.

**Tabelle 4.4:** Kombinationen der normal- und gleichverteilten Aktuator- und Balkeneigenschaften in den Abbildungen 4.9 und 4.10

| Fall | Aktuator- und Balkeneigenschaft |                       |           |           |       |       |
|------|---------------------------------|-----------------------|-----------|-----------|-------|-------|
|      | $F_B$                           | $\Delta z_{\max}$     | $F_v$     | $x_a$     | $b$   | $h$   |
| 1    | $N_{F_B}$                       | $N_{\Delta z_{\max}}$ | $N_{F_v}$ | $N_{x_a}$ | $N_b$ | $N_h$ |
| 2    | $N_{F_B}$                       | $N_{\Delta z_{\max}}$ | $N_{F_v}$ | $G_{x_a}$ | $N_b$ | $N_h$ |
| 3    | $N_{F_B}$                       | $N_{\Delta z_{\max}}$ | $N_{F_v}$ | $G_{x_a}$ | $N_b$ | $G_h$ |
| 4    | $N_{F_B}$                       | $N_{\Delta z_{\max}}$ | $N_{F_v}$ | $N_{x_a}$ | $N_b$ | $G_h$ |
| 5    | $N_{F_B}$                       | $N_{\Delta z_{\max}}$ | $N_{F_v}$ | $G_{x_a}$ | $G_b$ | $N_h$ |
| 6    | $N_{F_B}$                       | $N_{\Delta z_{\max}}$ | $N_{F_v}$ | $G_{x_a}$ | $G_b$ | $G_h$ |
| 7    | $N_{F_B}$                       | $N_{\Delta z_{\max}}$ | $N_{F_v}$ | $N_{x_a}$ | $G_b$ | $G_h$ |
| 8    | $N_{F_B}$                       | $N_{\Delta z_{\max}}$ | $N_{F_v}$ | $N_{x_a}$ | $G_b$ | $N_h$ |
| 9    | $N_{F_B}$                       | $N_{\Delta z_{\max}}$ | $G_{F_v}$ | $N_{x_a}$ | $N_b$ | $N_h$ |
| 10   | $N_{F_B}$                       | $N_{\Delta z_{\max}}$ | $G_{F_v}$ | $G_{x_a}$ | $N_b$ | $N_h$ |
| 11   | $N_{F_B}$                       | $N_{\Delta z_{\max}}$ | $G_{F_v}$ | $G_{x_a}$ | $N_b$ | $G_h$ |
| 12   | $N_{F_B}$                       | $N_{\Delta z_{\max}}$ | $G_{F_v}$ | $N_{x_a}$ | $N_b$ | $G_h$ |
| 13   | $N_{F_B}$                       | $N_{\Delta z_{\max}}$ | $G_{F_v}$ | $G_{x_a}$ | $G_b$ | $N_h$ |
| 14   | $N_{F_B}$                       | $N_{\Delta z_{\max}}$ | $G_{F_v}$ | $G_{x_a}$ | $G_b$ | $G_h$ |
| 15   | $N_{F_B}$                       | $N_{\Delta z_{\max}}$ | $G_{F_v}$ | $N_{x_a}$ | $G_b$ | $G_h$ |
| 16   | $N_{F_B}$                       | $N_{\Delta z_{\max}}$ | $G_{F_v}$ | $N_{x_a}$ | $G_b$ | $N_h$ |

Eine Sensitivitätsanalyse mit Einflussgrößenbetrachtung wie in [32] wird in dieser Arbeit nicht verfolgt, weil die Ermittlung der „einflussreichsten“ Aktuator- bzw. Balkeneigenschaft auf die berechneten Stellkräfte und -wege eines Stapelaktuators mit dem Arbeitsdiagramm nicht Ziel der vorgestellten Bewertung von Unsicherheit ist.

Im nächsten Abschnitt wird die statistische Auswertung der durchgeführten deterministischen Berechnungen für die 16 Fälle in Tabelle 4.4 vorgestellt.

#### 4.4.3 Statistische Auswertung

Die Auswertung der MCS erfolgt mit MATLAB<sup>®</sup>. Die Erwartungswerte, Standardabweichungen und Häufigkeitsverteilungen der numerischen Stellkräfte  $F_a$  und -wege  $\Delta z_a$  sowie die  $\alpha$ -Quantile der Häufigkeitsverteilungen der numerischen Stell-

wege aus den deterministischen Berechnungen werden ermittelt. Die Verteilungen der numerischen Arbeitspunkte des Stapelaktuators aus den MCS werden im Arbeitsdiagramm graphisch dargestellt.

Die  $\alpha$ -Quantile der Häufigkeitsverteilungen der numerischen Stellwege quantifizieren die Wahrscheinlichkeit einer Überschreitung des maximalen freien Stellwegs  $\Delta z_{\max} = 45 \mu\text{m}$ , d. h.  $P(\Delta z_{a,n} > \Delta z_{\max})$ . Sie geben die prozentualen Anteile der simulierten Aktuator- und Balkeneigenschaften an, die zu numerischen Stellwegen größer als  $\Delta z_{\max} = 45 \mu\text{m}$  führen [10].

Die Tabellen 4.5, 4.6 und 4.7 fassen die statistischen Ergebnisse der MCS für die Balkensteifigkeiten  $K_1 < K_2 < K_3$  zusammen.

**Tabelle 4.5:** Mittelwerte  $\bar{F}_a$  und  $\Delta \bar{z}_a$ , Standardabweichungen  $\sigma_{F_a}$  und  $\sigma_{\Delta z_a}$ , Grenzwerte  $\check{F}_a$ ,  $\hat{F}_a$ ,  $\Delta \check{z}_a$  und  $\Delta \hat{z}_a$  der Stellkräfte und -wege und  $\alpha$ -Quantile aus den MCS für die Balkensteifigkeit  $K_1$

| Fall | $\bar{F}_{a,1}$<br>[N] | $\sigma_{F_{a,1}}$<br>[N] | $\check{F}_{a,1}$<br>[N] | $\hat{F}_{a,1}$<br>[N] | $\Delta \bar{z}_{a,1}$<br>[ $\mu\text{m}$ ] | $\sigma_{\Delta z_{a,1}}$<br>[ $\mu\text{m}$ ] | $\Delta \check{z}_{a,1}$<br>[ $\mu\text{m}$ ] | $\Delta \hat{z}_{a,1}$<br>[ $\mu\text{m}$ ] | $\alpha_1$<br>[%] |
|------|------------------------|---------------------------|--------------------------|------------------------|---|--|---|---|-------------------|
| 1    | 17,16                  | 0,52                      | 15,18                    | 19,08                  | 43,03                                       | 1,43   | 37,43   | 48,92                                       | 8,28              |
| 2    | 17,16                  | 0,52                      | 15,19                    | 19,06                  | 43,03                                       | 1,43   | 37,43   | 48,92                                       | 8,27              |
| 3    | 17,16                  | 0,54                      | 15,07                    | 19,15                  | 43,03                                       | 1,43   | 37,43   | 48,92                                       | 8,28              |
| 4    | 17,16                  | 0,54                      | 15,09                    | 19,12                  | 43,03                                       | 1,43   | 37,43   | 48,92                                       | 8,28              |
| 5    | 17,16                  | 0,52                      | 15,19                    | 19,06                  | 43,03                                       | 1,43   | 37,43   | 48,92                                       | 8,27              |
| 6    | 17,16                  | 0,54                      | 15,06                    | 19,15                  | 43,03                                       | 1,43   | 37,43   | 48,92                                       | 8,28              |
| 7    | 17,16                  | 0,54                      | 15,08                    | 19,13                  | 43,03                                       | 1,43   | 37,43   | 48,92                                       | 8,28              |
| 8    | 17,16                  | 0,52                      | 15,19                    | 19,09                  | 43,03                                       | 1,43   | 37,43   | 48,92                                       | 8,28              |
| 9    | 17,17                  | 0,87                      | 15,38                    | 19,07                  | 43,03                                       | 1,43   | 37,42   | 48,88                                       | 8,22              |
| 10   | 17,17                  | 0,87                      | 15,38                    | 19,07                  | 43,03                                       | 1,43   | 37,42   | 48,88                                       | 8,22              |
| 11   | 17,17                  | 0,88                      | 15,29                    | 19,13                  | 43,03                                       | 1,43   | 37,42   | 48,88                                       | 8,21              |
| 12   | 17,17                  | 0,88                      | 15,29                    | 19,14                  | 43,03                                       | 1,43   | 37,42   | 48,88                                       | 8,22              |
| 13   | 17,17                  | 0,87                      | 15,37                    | 19,07                  | 43,03                                       | 1,43   | 37,42   | 48,88                                       | 8,22              |
| 14   | 17,17                  | 0,88                      | 15,29                    | 19,13                  | 43,03                                       | 1,43   | 37,42   | 48,88                                       | 8,21              |
| 15   | 17,17                  | 0,88                      | 15,29                    | 19,14                  | 43,03                                       | 1,43   | 37,42   | 48,88                                       | 8,23              |
| 16   | 17,17                  | 0,87                      | 15,38                    | 19,07                  | 43,03                                       | 1,43   | 37,42   | 48,88                                       | 8,22              |



Die Unterschiede zwischen den Mittelwerten der numerischen Stellkräfte  $\bar{F}_{a,1}$  und Stellwege  $\Delta\bar{z}_{a,1}$  sind für alle Fälle der MCS vernachlässigbar und sie stimmen mit den Nominalwerten  $F_{a,1}=17,20\text{N}$  und  $\Delta z_{a,1}=43\mu\text{m}$  in Tabelle 4.3 überein. Diese Übereinstimmung wird durch die hohe Stichprobenanzahl  $N=10.000$  an simulierten Aktuator- und Balkeneigenschaften und die Ableitung ihrer angenommenen Normal- und Gleichverteilungen aus den Grenzwerten in Tabelle 4.2 verursacht, siehe z. B. Gleichung (4.16). Die  $\alpha_1$ -Quantile zeigen, dass  $\approx 8,2\%$  aller simulierten Aktuator- und Balkeneigenschaften in den Abbildungen 4.9 und 4.10 Stellwege bewirken, die größer als der maximale freie Stellweg  $\Delta z_{\max}$  sind.

**Tabelle 4.6:** Mittelwerte  $\bar{F}_a$  und  $\Delta\bar{z}_a$ , Standardabweichungen  $\sigma_{F_a}$  und  $\sigma_{\Delta z_a}$ , Grenzwerte  $\check{F}_a$ ,  $\hat{F}_a$ ,  $\Delta\check{z}_a$  und  $\Delta\hat{z}_a$  der Stellkräfte und -wege und  $\alpha$ -Quantile aus den MCS für die Balkensteifigkeit  $K_2$

| Fall | $\bar{F}_{a,2}$<br>[N] | $\sigma_{F_{a,2}}$<br>[N] | $\check{F}_{a,2}$<br>[N] | $\hat{F}_{a,2}$<br>[N] | $\Delta\bar{z}_{a,2}$<br>[ $\mu\text{m}$ ] | $\sigma_{\Delta z_{a,2}}$<br>[ $\mu\text{m}$ ] | $\Delta\check{z}_{a,2}$<br>[ $\mu\text{m}$ ] | $\Delta\hat{z}_{a,2}$<br>[ $\mu\text{m}$ ] | $\alpha_2$<br>[%] |
|------|------------------------|---------------------------|--------------------------|------------------------|--|--|--|--|-------------------|
| 1    | 31,98                  | 0,86                      | 28,74                    | 35,73                  | 42,29                                      | 1,38   | 36,90  | 48,02                                      | 2,69              |
| 2    | 31,98                  | 0,87                      | 28,87                    | 35,90                  | 42,29                                      | 1,38   | 36,89  | 48,02                                      | 2,67              |
| 3    | 31,99                  | 1,05                      | 28,39                    | 35,49                  | 42,29                                      | 1,38   | 36,90  | 47,96                                      | 2,67              |
| 4    | 31,99                  | 1,04                      | 28,26                    | 35,53                  | 42,29                                      | 1,38   | 36,91  | 47,96                                      | 2,66              |
| 5    | 31,98                  | 0,87                      | 28,86                    | 35,90                  | 42,29                                      | 1,38   | 36,89  | 48,02                                      | 2,68              |
| 6    | 31,99                  | 1,05                      | 28,37                    | 35,48                  | 42,29                                      | 1,38   | 36,90  | 47,96                                      | 2,67              |
| 7    | 31,99                  | 1,04                      | 28,24                    | 35,49                  | 42,29                                      | 1,38   | 36,91  | 47,96                                      | 2,66              |
| 8    | 31,98                  | 0,86                      | 28,72                    | 35,73                  | 42,29                                      | 1,38   | 36,90  | 48,02                                      | 2,69              |
| 9    | 31,99                  | 1,11                      | 28,51                    | 36,12                  | 42,29                                      | 1,39   | 36,88  | 47,97                                      | 2,64              |
| 10   | 31,99                  | 1,12                      | 28,46                    | 36,06                  | 42,29                                      | 1,39   | 36,87  | 47,98                                      | 2,64              |
| 11   | 32,00                  | 1,25                      | 28,13                    | 36,08                  | 42,29                                      | 1,39   | 36,88  | 47,92                                      | 2,68              |
| 12   | 32,00                  | 1,25                      | 28,16                    | 36,12                  | 42,29                                      | 1,39   | 36,89  | 47,92                                      | 2,63              |
| 13   | 31,99                  | 1,12                      | 28,42                    | 36,04                  | 42,29                                      | 1,39   | 36,87  | 47,97                                      | 2,65              |
| 14   | 32,00                  | 1,25                      | 28,10                    | 36,10                  | 42,29                                      | 1,39   | 36,88  | 47,92                                      | 2,68              |
| 15   | 32,00                  | 1,25                      | 28,14                    | 36,20                  | 42,29                                      | 1,39   | 36,89  | 47,92                                      | 2,62              |
| 16   | 31,99                  | 1,11                      | 28,56                    | 36,10                  | 42,29                                      | 1,39   | 36,88  | 47,97                                      | 2,64              |

Auch in Tabelle 4.6 sind die Unterschiede zwischen den Mittelwerten der numerischen Stellkräfte  $\bar{F}_{a,2}$  und Stellwege  $\Delta\bar{z}_{a,2}$  für alle Fälle der MCS vernachlässigbar und sie stimmen mit den Nominalwerten  $F_{a,2} = 31,90\text{ N}$  und  $\Delta z_{a,2} = 42,30\text{ }\mu\text{m}$  in Tabelle 4.3 überein. Diese Übereinstimmung wird durch die hohe Stichprobenanzahl  $N = 10.000$  an simulierten Aktuator- und Balkeneigenschaften und die Ableitung ihrer angenommenen Normal- und Gleichverteilungen aus den Grenzwerten in Tabelle 4.2 verursacht, siehe Gleichung (4.16). Die  $\alpha_2$ -Quantile zeigen, dass  $\approx 2,6\%$  aller simulierten Aktuator- und Balkeneigenschaften in den Abbildungen 4.9 und 4.10 Stellwege bewirken, die größer als der maximale freie Stellweg  $\Delta z_{\max}$  sind.

**Tabelle 4.7:** Mittelwerte  $\bar{F}_a$  und  $\Delta\bar{z}_a$ , Standardabweichungen  $\sigma_{F_a}$  und  $\sigma_{\Delta z_a}$ , Grenzwerte  $\check{F}_a$ ,  $\hat{F}_a$ ,  $\Delta\check{z}_a$  und  $\Delta\hat{z}_a$  der Stellkräfte und -wege und  $\alpha$ -Quantile aus den MCS für die Balkensteifigkeit  $K_3$

| Fall | $\bar{F}_{a,3}$<br>[N] | $\sigma_{F_{a,3}}$<br>[N] | $\check{F}_{a,3}$<br>[N] | $\hat{F}_{a,3}$<br>[N] | $\Delta\bar{z}_{a,3}$<br>[ $\mu\text{m}$ ] | $\sigma_{\Delta z_{a,3}}$<br>[ $\mu\text{m}$ ] | $\Delta\check{z}_{a,3}$<br>[ $\mu\text{m}$ ] | $\Delta\hat{z}_{a,3}$<br>[ $\mu\text{m}$ ] | $\alpha_3$<br>[%] |
|------|------------------------|---------------------------|--------------------------|------------------------|--|--|--|--|-------------------|
| 1    | 69,79                  | 2,00                      | 61,72                    | 77,84                  | 40,39                                      | 1,27   | 35,52  | 45,51                                      | 0,02              |
| 2    | 69,79                  | 2,03                      | 62,10                    | 78,39                  | 40,39                                      | 1,27   | 35,52  | 45,48                                      | 0,02              |
| 3    | 69,79                  | 2,34                      | 61,43                    | 79,78                  | 40,39                                      | 1,27   | 35,42  | 45,40                                      | 0,02              |
| 4    | 69,80                  | 2,32                      | 61,33                    | 79,22                  | 40,39                                      | 1,27   | 35,42  | 45,43                                      | 0,02              |
| 5    | 69,78                  | 2,03                      | 62,27                    | 78,20                  | 40,39                                      | 1,27   | 35,52  | 45,49                                      | 0,02              |
| 6    | 69,79                  | 2,34                      | 61,47                    | 79,58                  | 40,39                                      | 1,27   | 35,42  | 45,41                                      | 0,02              |
| 7    | 69,80                  | 2,33                      | 61,36                    | 79,03                  | 40,39                                      | 1,27   | 35,42  | 45,44                                      | 0,02              |
| 8    | 69,79                  | 2,00                      | 61,89                    | 77,65                  | 40,39                                      | 1,27   | 35,52  | 45,52                                      | 0,02              |
| 9    | 69,79                  | 2,11                      | 61,93                    | 78,60                  | 40,39                                      | 1,27   | 35,51  | 45,46                                      | 0,02              |
| 10   | 69,79                  | 2,13                      | 61,37                    | 79,15                  | 40,39                                      | 1,27   | 35,51  | 45,43                                      | 0,02              |
| 11   | 69,80                  | 2,44                      | 60,99                    | 80,54                  | 40,39                                      | 1,27   | 35,41  | 45,39                                      | 0,02              |
| 12   | 69,80                  | 2,43                      | 61,38                    | 79,98                  | 40,39                                      | 1,27   | 35,41  | 45,40                                      | 0,02              |
| 13   | 69,79                  | 2,13                      | 61,30                    | 78,96                  | 40,39                                      | 1,27   | 35,50  | 45,44                                      | 0,02              |
| 14   | 69,80                  | 2,44                      | 61,09                    | 80,35                  | 40,39                                      | 1,27   | 35,40  | 45,39                                      | 0,02              |
| 15   | 69,80                  | 2,43                      | 61,45                    | 79,79                  | 40,39                                      | 1,27   | 35,40  | 45,40                                      | 0,02              |
| 16   | 69,79                  | 2,11                      | 62,07                    | 78,41                  | 40,39                                      | 1,27   | 35,51  | 45,47                                      | 0,02              |

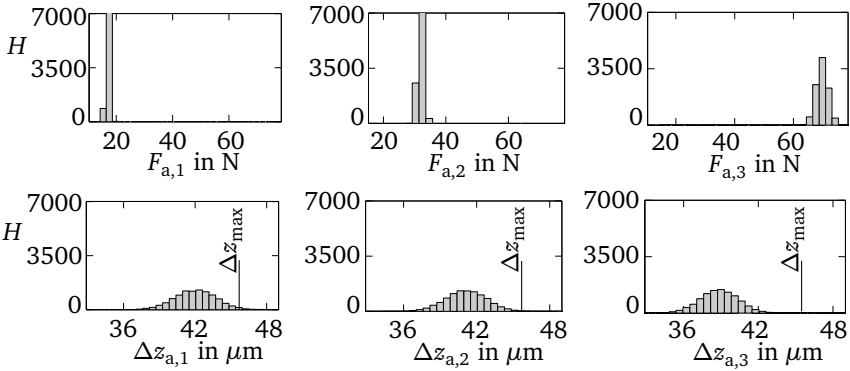
Auch in Tabelle 4.7 sind die Unterschiede zwischen den Mittelwerten der numerischen Stellkräfte  $\bar{F}_{a,3}$  und Stellwege  $\Delta\bar{z}_{a,3}$  für alle Fälle der MCS vernachlässigbar und sie stimmen mit den Nominalwerten  $F_{a,3} = 69,70 \text{ N}$  und  $\Delta z_{a,3} = 40,40 \mu\text{m}$  in Tabelle 4.3 überein. Diese Übereinstimmung wird durch die hohe Stichprobenanzahl  $N = 10.000$  an simulierten Aktuator- und Balkeneigenschaften und die Ableitung ihrer angenommenen Normal- und Gleichverteilungen aus den Grenzwerten in Tabelle 4.2 verursacht, siehe Gleichung (4.16). Diese Übereinstimmung zeigt auch die Konvergenz der durchgeführten MCS. Die  $\alpha_3$ -Quantile zeigen, dass  $\approx 0,02 \%$  aller simulierten Aktuator- und Balkeneigenschaften in den Abbildungen 4.9 und 4.10 Stellwege bewirken, die größer als der maximale freie Stellweg  $\Delta z_{\max}$  sind.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die numerischen Stellwege größer als der maximale freie Stellweg sind, sinkt mit einer zunehmenden Balkensteifigkeit bzw. Balkendicke  $h_1 < h_2 < h_3$  von  $8 \%$  auf  $0,02 \%$  ab. Dieses Ergebnis war auch aufgrund des kritischen Arbeitspunkts der Stapelaktuatoren mit einer elektrischen Betriebsspannung  $U = 195 \text{ V}$  nahe ihrem maximalen Wert  $U_{\max} = 200 \text{ V}$  und in Verbindung mit drei schlanken Balken zu erwarten, siehe Abbildung 2.8.

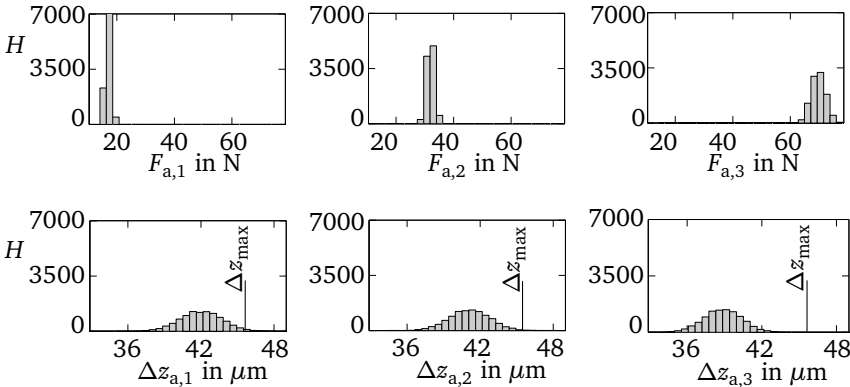
Die Streuungen in den numerischen Stellkräften werden mit einer zunehmender Balkensteifigkeit  $K$  auch größer. Dennoch sind diese Streuungen unkritisch, da der Höchstwert der numerischen Stellkraft  $\hat{F}_{a,3} = 80,54 \text{ N}$  beträgt und etwa 11 mal kleiner als die Blockierkraft  $F_B = 900 \text{ N}$  ist, siehe Fall 11 in Tabelle 4.7.

Die Mittelwerte der numerischen Stellwege  $\Delta\bar{z}_{a,n}$  in den Tabellen 4.5 bis 4.7 werden mit zunehmender Balkensteifigkeit  $K_1 < K_2 < K_3$  kleiner. Die Standardabweichungen  $\sigma_{\Delta z_{a,n}}$  werden z. B. von  $\approx 1,4 \mu\text{m}$  bis  $\approx 1,2 \mu\text{m}$  kleiner. Aus diesem Grund sind z. B. die Stellwege des Stapelaktuators als Regelgröße für das aktive Balkensystem in Abbildung 2.3 den Stellkräften des gleichen Stapelaktuators vorzuziehen. Stapelaktuatoren mit integrierten DMS sind bereits kommerziell verfügbar, auch wenn diese DMS vor allem zur Kompensation des Hysterese-Verhaltens der Stapelaktuatoren gedacht worden sind [77, 74].

Die Häufigkeitsverteilungen der numerischen Stellkräfte und -wege aus den MCS bleiben, trotz guter Übereinstimmung zwischen den Mittelwerten  $\bar{F}_a$  und  $\Delta\bar{z}_a$  in den Tabellen 4.5 bis 4.7, unterschiedlich. Dieser Sachverhalt wird mit den beiden Fällen 1 und 14 in Tabelle 4.4 dargestellt. Im Fall 1 sind alle streuende Aktuator- und Balkeneigenschaften normalverteilt und im Fall 14 sind die Aktuator- und Balkeneigenschaften mit unbekannter Verteilung, Vorspannkraft  $F_v$ , Angriffspunkt  $x_a$  der aktiven Kraft auf den Balken, die Balkenbreite  $b$  und -dicke  $h$  als gleichverteilt angenommen. Die Abbildungen 4.11 und 4.12 zeigen die Häufigkeitsverteilungen der numerisch abgeschätzten Stellkräfte und -wege  $F_{a,1}$ ,  $F_{a,2}$ ,  $F_{a,3}$ ,  $\Delta z_{a,1}$ ,  $\Delta z_{a,2}$  und  $\Delta z_{a,3}$  beider Fälle 1 und 14.



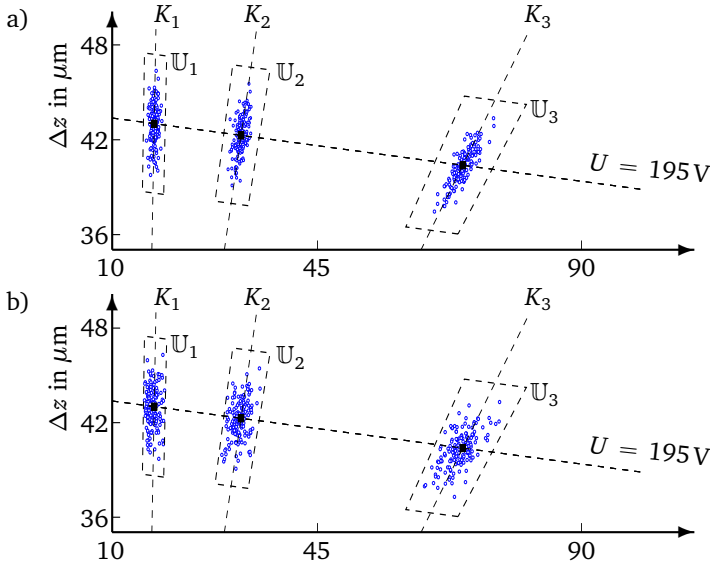
**Abbildung 4.11:** Häufigkeitsverteilungen der numerischen Stellkräfte und -wege für den Fall 1 aus Tabelle 4.4 für die Betriebsspannung  $U = 195 \text{ V}$  und die Vorspannkraft  $F_v = 15 \text{ N}$



**Abbildung 4.12:** Häufigkeitsverteilungen der numerischen Stellkräfte und -wege für den Fall 14 aus Tabelle 4.4 für die Betriebsspannung  $U = 195 \text{ V}$  und die Vorspannkraft  $F_v = 15 \text{ N}$

Die Häufigkeitsverteilungen der numerischen Stellkräfte und -wege  $F_{a,n}$  und  $\Delta z_{a,n}$  sind in den beiden Fällen 1 und 14 in den Abbildungen 4.11 und 4.12 unterschiedlich,  $n = 1, 2, 3$ . Die numerischen Stellwege  $\Delta z_{a,n}$  in den Abbildungen 4.11 und 4.12 sind normalverteilt. Die Normalverteilungen der Blockierkraft  $F_B$  und des maximalen freien Stellwegs  $\Delta z_{\max}$  in Abbildung 4.9 haben einen stärkeren Einfluss auf die Häufigkeitsverteilungen der numerischen Stellwege  $\Delta z_{a,n}$ .

In den MCS werden die numerischen Stellkräfte und -wege paarweise als Arbeitspunkte  $(F_{a,n}; \Delta z_{a,n})$  mit dem Gleichungssystem (2.11) ermittelt. Abbildung 4.13 zeigt die Verteilungen von jeweils 150 zufällig ausgewählten simulierten Arbeitspunkten beider Fälle 1 und 14 aus Tabelle 4.4 der MCS. Die gestrichelten Unsicherheitsregionen in den Arbeitsdiagrammen in Abbildung 4.13 stammen aus den Worst-Case Analysen in Abbildung 4.4.



**Abbildung 4.13:** Verteilungen der numerischen Arbeitspunkte (○) für die Betriebsspannung  $U = 195 \text{ V}$  und die Vorspannkraft  $F_v = 15 \text{ N}$  in a) für den Fall 1 und in b) für den Fall 14 der MCS in Tabelle 4.4

Die angenommenen Normal- und Gleichverteilungen der Aktuator- und Balkeneigenschaften in den Abbildungen 4.9 und 4.10 führen zu unterschiedlichen Verteilungen der simulierten Arbeitspunkte im Arbeitsdiagramm. Die gleichverteilten Eigenschaften Vorspannkraft  $F_v$ , Angriffspunkt  $x_a$  der aktiven Kraft auf dem Balken, Balkenbreite  $b$  und -dicke  $h$  verursachen eine breitere Verteilung der simulierten Arbeitspunkte zwischen den minimalen und maximalen Kraft-Weg-Kennlinien der Balken in Abbildung 4.13b. Einige simulierten Arbeitspunkte können außerhalb einer Unsicherheitsregion  $\mathbb{U}$  liegen, weil die Standardabweichungen  $\sigma_{\square}$  der simulierten Normalverteilungen so gewählt sind, dass  $\approx 99,6\%$  der numerisch generierten Eigenschaftswerte innerhalb der Grenze von  $\pm 3\sigma_{\square}$  um jeden Mittelwert

liegen, siehe Gleichung (4.16). Arbeitspunkte außerhalb einer Unsicherheitsregion  $\mathbb{U}$  in Abbildung 4.13 wären repräsentativ für die restlichen  $\approx 0,4\%$  der simulierten Eigenschaftswerte, die außerhalb der Grenzen  $\pm 3\sigma_{\mathbb{U}}$  um jeden Mittelwert liegen.

Die angenommenen Normal- und Gleichverteilungen der streuenden Aktuator- und Balkeneigenschaften in den Abbildungen 4.9 und 4.10, die Häufigkeitsverteilungen der numerischen Stellkräfte und -wege in den Abbildungen 4.11 und 4.12 sowie die Verteilungen der simulierten Arbeitspunkte im Arbeitsdiagramm in Abbildung 4.2 zeigen, dass die Ergebnisse der MCS zur stochastischen Unsicherheit gehören.

Die numerischen Ergebnisse der Worst-Case Analysen und MCS zu den Arbeitspunkten des Stapelaktuators im aktiven System werden im nächsten Abschnitt zusammengefasst und diskutiert.

---

## 4.5 Zusammenfassung und Diskussion der numerischen Ergebnisse

---

Die Wirkungen der Streuungen in der Blockierkraft  $F_B$ , dem maximalen freien Stellweg  $\Delta z_{\max}$  und der Vorspannkraft  $F_v$  des Stapelaktuators, im Angriffspunkt  $x_a$  der aktiven Kraft auf dem Balken, in der Breite  $b$  und Dicke  $h$  des Balkens auf die numerischen Stellkräfte und -wege des Stapelaktuators in Verbindung mit den Balkensteifigkeiten  $K_1 < K_2 < K_3$  im aktiven System aus dem Kapitel 2.3 sind mit Worst-Case Analysen und MCS quantifiziert worden. Die Worst-Case Analysen zu den Arbeitspunkten des Stapelaktuators im aktiven System zeigen,

- dass die numerischen Stellkräfte und -wege eines nominalen Arbeitspunkts innerhalb einer jeweiligen Unsicherheitsregion  $\mathbb{U}$  im Arbeitsdiagramm variieren, siehe Abbildung 4.3,
- dass der Flächeninhalt einer Unsicherheitsregion  $\mathbb{U}$  von den streuenden Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 4.2, der Betriebsspannung  $U$  und der Vorspannkraft  $F_v$  des Stapelaktuators abhängt, siehe Abbildung 4.5,
- dass der Flächeninhalt einer Unsicherheitsregion  $\mathbb{U}$  mit zunehmender Balkensteifigkeit  $K_n$ , Betriebsspannung  $U$  und Vorspannkraft  $F_v$  größer wird und
- dass es einen linearen bzw. nichtlinearen Zusammenhang zwischen dem Flächeninhalt einer Unsicherheitsregion  $\mathbb{U}$  und der Vorspannkraft  $F_v$  bzw. der Betriebsspannung  $U$  gibt, siehe Abbildung 4.5.

Das deterministische Arbeitsdiagramm in Abbildung 4.1, das zu eindeutigen Stellkräften und -wegen  $F_{a,n}$  und  $\Delta z_{a,n}$  mit dem Gleichungssystem (2.11) führt,

wird mithilfe der Worst-Case Analysen zu einem nichtdeterministischen Arbeitsdiagramm erweitert, das Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_n$  und die Grenzwerte der numerischen Stellkräfte und -wege  $[\check{F}_{a,n}; \hat{F}_{a,n}]$  und  $[\check{\Delta z}_{a,n}; \hat{\Delta z}_{a,n}]$  in Tabelle 4.3 ermittelt, mit  $n = 1, 2, 3$ . Die Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_1 < \mathbb{U}_2 < \mathbb{U}_3$  der Worst-Case Analysen werden, wie erwartet, überschätzt, weil die Grenzwerte bzw. Streuungen in den Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 4.2 meist größer als die tatsächlich messbare Grenzwerte und Streuungen sind [69]. Dieser Sachverhalt wird auch im Kapitel 5 der vorliegenden Arbeit beschrieben. Elliptische Unsicherheitsregionen  $\mathbb{E}$  innerhalb der konservativen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}$  vermeiden, dass die Einflüsse der Streuungen in den Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 4.2 auf die numerischen Stellkräfte und -wege des Stapelaktuators im aktiven System überschätzt werden, siehe Abbildung 4.7 in Abschnitt 4.3.3.

Die Monte Carlo-Simulationen (MCS) zu den Arbeitspunkten im Abschnitt 4.4 zeigen,

- dass unterschiedliche Normal- und Gleichverteilungen der streuenden Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 4.2 zu unterschiedlichen Verteilungen der numerischen Arbeitspunkte im Arbeitsdiagramm führen, siehe Abbildung 4.13,
- dass die Streuungen in den Häufigkeitsverteilungen der numerischen Stellkräfte  $F_{a,n}$  mit zunehmender Balkensteifigkeit  $K_n$  größer werden, siehe die Abbildungen 4.11 und 4.12,
- dass die Streuungen in den Häufigkeitsverteilungen der numerischen Stellwege  $\Delta z_{a,n}$  mit zunehmender Balkensteifigkeit  $K_n$  nahezu konstant bleiben, siehe die Abbildungen 4.11 bis 4.12
- dass  $\approx 8\%$ ,  $\approx 3\%$  und  $\approx 0,02\%$  der simulierten Aktuator- und Balkeneigenschaften Stellwege  $\Delta z_{a,3}$ ,  $\Delta z_{a,2}$  und  $\Delta z_{a,1}$  erzeugen, die größer als den maximalen freien Stellweg  $\Delta z_{\max} = 45 \mu\text{m}$  sind.

Das nichtdeterministische Arbeitsdiagramm aus den MCS ermittelt die Grenzwerte, die Mittelwerte, die Standardabweichungen und die Häufigkeitsverteilungen der numerischen Stellkräfte und -wege, die Verteilungen der numerischen Arbeitspunkte im Arbeitsdiagramm sowie die  $\alpha$ -Quantile der Häufigkeitsverteilungen der numerischen Stellwege.

Ein kritischer Punkt der MCS liegt in der Annahme von statistisch unabhängigen Aktuator- und Balkeneigenschaften, so dass Wechselwirkungen zwischen ihnen ausgeschlossen sind. Diese Annahme ist für die Blockierkraft  $F_B$  und den maximalen freien Stellweg  $\Delta z_{\max}$  nur bedingt gültig, da sie beide von den Materialeigenschaften des PZT-Werkstoffs abhängig sind [81, 50].

---

Von den Worst-Case Analysen bis zu den MCS nimmt der Anteil an verfügbaren Informationen über die Variationen der Stellkräfte und -wege des Stapelaktuators im aktiven System von der Ungewissheit bis zur stochastischen Unsicherheit zu. Die notwendigen Verteilungen der streuenden Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 4.2 zur Durchführung der MCS sind oft nicht verfügbar, so dass angenommene Verteilungsfunktionen wie die Normal- und die Gleichverteilung berücksichtigt werden müssen. Dennoch ist eine gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Worst-Case Analysen und der MCS ermittelt worden, da  $\approx 99,6\%$  der simulierten Arbeitspunkte in den MCS in den Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_1 < \mathbb{U}_2 < \mathbb{U}_3$  der Worst-Case Analysen liegen, siehe Abbildung 4.13.

Das nächste Kapitel 5 stellt die experimentellen Untersuchungen an mehreren baugleichen Stapelaktuatoren vom Typ Ceramtec 3 9999–62 und Balken mit den Dicken  $h_1 < h_2 < h_3$  vor. Die Stellkräfte und -wege der Stapelaktuatoren und Balken werden in einem experimentellen aktiven System gemessen, um die numerischen Ergebnisse der Worst-Case Analysen und MCS aus Kapitel 4 zu validieren.



---

## 5 Experimentelle Untersuchungen

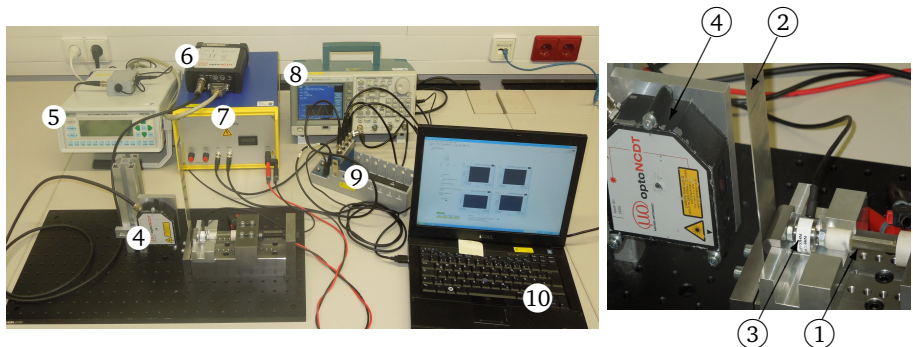
In diesem Kapitel wird die Gültigkeit der ermittelten Variationen in den Stellkräften und -wegen des Stapelaktuators vom Typ 3.9999-62 im aktiven System aus dem Kapitel 4 mit experimentellen Versuchen überprüft. Die tatsächlichen Stellkräfte und -wege von baugleichen Stapelaktuatoren vom Typ 3 9999-62 in Verbindung mit drei Aluminiumbalken der Dicken  $h_1 < h_2 < h_3$  werden in einem experimentellen aktiven System für eine quasistatische und dynamische elektrische Ansteuerungsfrequenz gemessen, um die numerischen Ergebnisse in Kapitel 4 zu validieren.

---

### 5.1 Beschreibung des experimentellen aktiven Systems

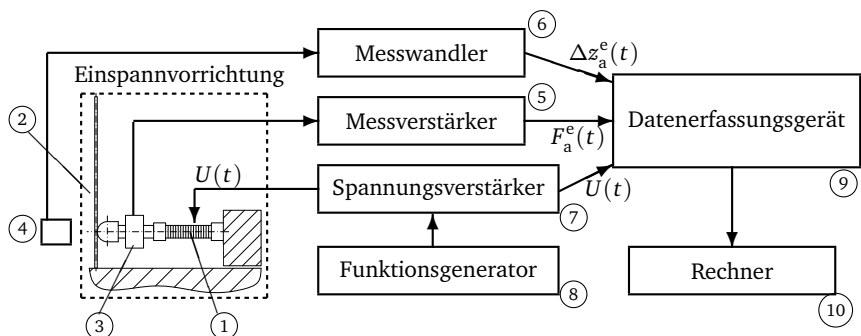
---

Abbildung 5.1 zeigt ein Bild des Versuchsstands zur Messung der experimentellen Stellkräfte und -wege eines Stapelaktuators in Verbindung mit einem Balken nach Abbildung 2.7.



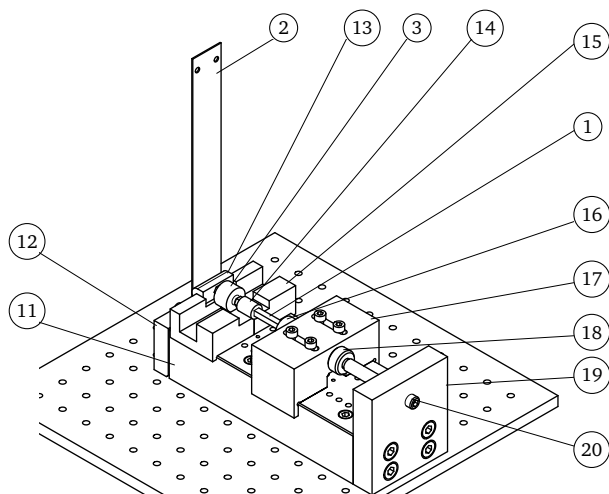
**Abbildung 5.1:** Aufbau des experimentellen aktiven Systems

Ein Prinzipschaltbild des experimentellen aktiven Systems ist in Abbildung 5.2 zu sehen.



**Abbildung 5.2:** Prinzipielle Darstellung des experimentellen aktiven Systems

Abbildung 5.3 zeigt ein CAD-Modell der Einspannvorrichtung des Stapelaktuators und des Balkens im experimentellen aktiven System.



**Abbildung 5.3:** CAD-Modell der Einspannvorrichtung

Im Anhang A.2 werden eine Vorder- und Seitenansicht der Einspannvorrichtung mit ihren geometrischen Hauptabmessungen dargestellt. In Tabelle 5.1 sind die Namen und Typbezeichnungen der verwendeten Sensoren und Geräte zur Messsignalverarbeitung und elektrischen Ansteuerung eines Stapelaktuators sowie die Bauteile der Einspannvorrichtung aufgelistet.

**Tabelle 5.1:** Sensoren, elektrische Geräte und mechanische Bauteile des experimentellen aktiven Systems in Abbildung 5.1

| Nr. | Anzahl | Name, Typbezeichnung, Hersteller, Werkstoff  |
|-----|--------|--|
| 1   | 1      | Stapelaktuator vom Typ 3 9999-62, Ceramtec GmbH, siehe Abbildung 2.8 in Abschnitt 2.3  |
| 2   | 1      | Aluminiumbalken, Länge $l = 235$ mm, Breite $b = 30$ mm, Dicke $h = 1/2/3$ mm, AlMg3   |
| 3   | 1      | Kraftmessdose, ALF251FROHN-1,6 kN, Messbereich: 1,6 kN Zugkraft, Genauigkeit $\pm 0,05\%$ vom Endwert, ALTHEN GmbH                       |
| 4   | 1      | Laser-Triangulationssensor, <i>optoNCDT ILD 2200-2</i> , Messbereich: 2 mm, Linearität $\pm 0,05\%$ des Messbereichs, Micro-Epsilon GmbH |
| 5   | 1      | Messverstärker, <i>PICAS-LCD-4F</i> , Trägerfrequenz-Messverstärker, Peckel Instruments GmbH   |
| 6   | 1      | Controller, im Lieferumfang von <i>optoNCDT ILD 2200-2</i> , Micro-Epsilon GmbH  |
| 7   | 1      | Spannungsverstärker, <i>LE200/070</i> , Piezomechanik Dr. L. Pickelmann GmbH   |
| 8   | 1      | Arbiträrer Funktionsgenerator AFG3102, Tektronix GmbH  |
| 9   | 1      | Datenerfassungsgerät, <i>CDAQ-9178+NI 9219</i> , COMPACT-DAQ, National Instruments GmbH  |
| 10  | 1      | Personalcomputer, <i>Dell E6400</i> , Dell GmbH  |
| 11  | 1      | Einspannblock, Stahl   |
| 12  | 1      | Deckel, Stahl  |
| 13  | 1      | Stempel, Stahl   |
| 14  | 1      | Keramikteil, Macor <sup>®</sup> MCI GmbH   |
| 15  | 1      | Halterung, Aluminium   |
| 16  | 1      | Keramikteil, Macor <sup>®</sup>  |
| 17  | 1      | Klemmbake, Stahl   |
| 18  | 1      | Druckstück DIN 6311-25-S, Stahl  |
| 19  | 1      | feststehende Backe, Stahl  |
| 20  | 1      | Gewindestift DIN 6332-M10-80SK, Stahl  |

Ein Stapelaktuator (1) vom Typ 3 9999-62 und ein Balken (2) werden in die Einspannvorrichtung in Abbildung 5.3 montiert. Der Balken (2) wird mit vier M5-Schrauben zwischen dem Deckel (12) und dem Einspannblock (11) geklemmt. Der Stapelaktuator (1) wird zwischen der Klemmbacke (17) und dem Kraftaufnehmer (3) montiert und mithilfe eines Gewindestifts (20) gegen den Balken (2) über den Stempel (13) vorgespannt. Die Klemmbacke (17) wird am Einspannblock (11) festgeschraubt, bis die vom Messverstärker (5) angezeigte mechanische Kraft mit der gewünschten Vorspannkraft  $F_v$  übereinstimmt. Der Kraftaufnehmer (3) wird zwischen dem Stapelaktuator (1) und dem Balken (2) zur Messung der Stellkräfte montiert. Ein Laser-Triangulationssensor (4) misst die Durchbiegung des Balkens (2) in seiner Verbindungsstelle mit dem Stapelaktuator (1), siehe Abbildung 5.1. Die elektrische Ansteuerung des Stapelaktuators (1) erfolgt mit einem Funktionsgenerator (8) und einem Spannungsverstärker (7). Der Funktionsgenerator (8) erzeugt ein elektrisches Spannungssignal, das vom Spannungsverstärker (7) mit einem Faktor 40:1 verstärkt wird und auf dem Stapelaktuator (1) aufgelegt wird. Die Messsignale des Kraftaufnehmers (3) und des Laser-Triangulationssensors (4) werden jeweils über einen Messverstärker (5) und einen Messwandler (6) an einem Datenerfassungsgerät (9) weitergeleitet. Das Spannungssignal aus dem Spannungsverstärker (7) wird ebenfalls zum Datenerfassungsgerät (9) weitergeleitet. Das Datenerfassungsgerät (9) ist über eine USB-Schnittstelle mit einem Rechner (10) verbunden. Zur Speicherung, Darstellung und Auswertung der Messdaten auf dem Rechner (10) werden selbstgeschriebene Programme in LabView<sup>®</sup> und MATLAB<sup>®</sup> verwendet. Die Verläufe der Stellkräfte und -wege  $F_a^e(t)$  und  $\Delta z_a^e(t)$  von sieben baugleichen Stapelaktuatoren des Typs 3 9999-62 in Abbildung 2.8 aus derselben Produktionscharge in Verbindung mit drei Balken der Dicken  $h_1 < h_2 < h_3$  werden für eine konstante Zeitdauer von 10 Sekunden gemessen. Die Messdauer wird auf 10s festgelegt, um die Einflüsse von Nichtlinearitäten wie das Kriechen der Stapelaktuatoren zu minimieren.

---

### 5.1.1 Versuchsparameter im experimentellen aktiven System

---

Die Stapelaktuatoren werden mit zeitlich veränderlichen Betriebsspannungen  $U(t)$  betrieben. Hierfür wird eine schwellende elektrische Betriebsspannung

$$U(t) = \frac{\hat{U}_m}{2} [1 + \sin((2\pi f)t)], \quad (5.1)$$

mit konstanter maximalen Spannungsamplitude  $\hat{U}_m$  und Frequenz  $f$  verwendet,  $m = 1, 2, \dots 5$ .

Die maximalen Spannungsamplituden  $\hat{U}_1 = 40 \text{ V}$ ,  $\hat{U}_2 = 60 \text{ V}$ ,  $\hat{U}_3 = 100 \text{ V}$ ,  $\hat{U}_4 = 140 \text{ V}$  und  $\hat{U}_5 = 195 \text{ V}$  werden exemplarisch simuliert, um z. B. die Abhängigkeit zwischen den Streuungen in den Stellkräften und -wegen des Stapelaktuators und der Betriebsspannung  $U$  des Stapelaktuators aus den Worst-Case Analysen in Abschnitt 4.3 zu überprüfen. Mit den verschiedenen Spannungsamplituden  $\hat{U}$  werden auch die Kraft-Weg-Kennlinien der Stapelaktuatoren und die Abhängigkeiten zwischen gemessenen Arbeitspunkten und elektrischen Spannungsamplituden ermittelt. Die maximale Spannungsamplitude  $\hat{U}_5 = 195 \text{ V}$  entspricht der maximalen elektrischen Betriebsspannung des Stapelaktuators im aktiven System in Kapitel 4. Die minimale Spannungsamplitude  $\hat{U}_1 = 40 \text{ V}$  stellt einen Grenzwert dar, bei dem die gemessenen zeitlichen Verläufe der Stellkraft und des Stellwegs vom Signalrauschen noch nicht überdeckt werden. Die anderen elektrischen Spannungsamplituden  $\hat{U}_2$ ,  $\hat{U}_3$  und  $\hat{U}_4$  werden zufällig zwischen  $\hat{U}_1$  und  $\hat{U}_5$  ausgewählt.

Die Frequenzen  $f_1 = 1 \text{ Hz}$  und  $f_2 = 27 \text{ Hz}$  werden für die elektrische Betriebsspannung  $U(t)$  des Stapelaktuators gewählt. Die Ansteuerungsfrequenz  $f_1 = 1 \text{ Hz}$  entspricht dem quasistatischen Betrieb, der in [43] für die Gültigkeit des Arbeitsdiagramms angegeben wird. Die Ansteuerungsfrequenz  $f_2 = 27 \text{ Hz}$  entspricht dem dynamischen Betrieb eines Stapelaktuators im aktiven Balkensystem und sie wird aus dem Fourierspektrum der elektrischen Betriebsspannung  $U(t)$  in Abbildung 2.5 abgelesen, siehe Anhang A.4.

Zwei unterschiedliche Vorspannkraften  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$  und  $F_{v,2} = 20 \text{ N}$  werden im experimentellen aktiven System simuliert, um u. a. den linearen Zusammenhang zwischen den Streuungen in den Stellkräften und -wegen und der Vorspannkraft  $F_v$  des Stapelaktuators aus den Worst-Case Analysen in Abbildung 4.5 zu überprüfen.

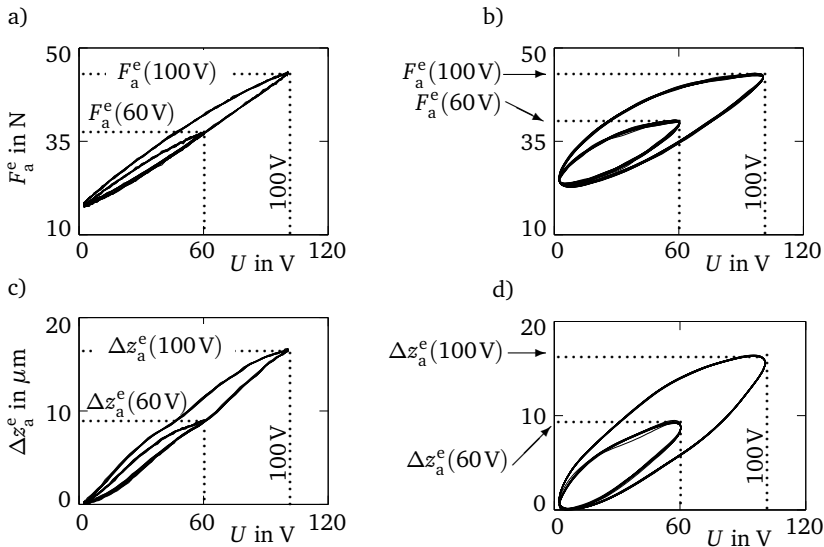
Die gewählten Werte der maximalen Spannungsamplituden  $\hat{U}_m$ , der Frequenz  $f$  und der Vorspannkraft  $F_v$  orientieren sich nach dem kritischen Arbeitspunkt des Stapelaktuators im untersuchten aktiven System in Abbildung 2.8 und nach dem experimentellen Prüfstand in Abbildung 5.1. Diese Werte sind vom Aktuator selbst und vom aktiven System, in dem dieser eingesetzt wird, abhängig.

Die Arbeitspunkte von 7 baugleichen Stapelaktuatoren aus einer Produktionscharge in Verbindung mit drei Balken der Dicken  $h_1 < h_2 < h_3$  werden im Versuchsstand gemessen. Mit diesen Stapelaktuatoren können die Streuungen in der Blockierkraft  $F_B$  und im maximal freien Stellweg  $\Delta z_{\max}$  experimentell nachgewiesen werden. Eine statistische Absicherung dieser Streuungen mit einer größeren Anzahl an Stapelaktuatoren (z. B.  $> 30$ ) würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

Der nächste Abschnitt befasst sich mit der Ermittlung der experimentellen Arbeitspunkte.

## 5.1.2 Ermittlung der experimentellen Arbeitspunkte

Die Werte der gemessenen Stellkraft  $F_a^e$  für  $U(t) = 0\text{V}$  werden über die gesamte Messdauer von 10 s gemittelt und die daraus resultierenden Mittelwerte bilden die gemessene Vorspannkraft  $F_v^e$  der jeweiligen Messung. Die Werte der Stellkraft und des Stellwegs für  $U(t) = \hat{U}$  werden gemittelt und die resultierenden Mittelwerte bilden die gemessenen Stellkraft und -weg  $F_a^e$  und  $\Delta z_a^e$  der jeweiligen Messung. Die Maximalwerte der gemessenen Stellkräfte und -wege für  $U(t) = \hat{U}$  werden bei der Ermittlung der experimentellen Arbeitspunkte berücksichtigt, da sie unabhängig vom Hysterese-Verhalten der Stapelaktuatoren stets erreicht werden. Dieser Sachverhalt wird in Abbildung 5.4 mit den gemessenen Verläufen der Stellkraft  $F_a^e(t)$  und des Stellwegs  $\Delta z_a^e(t)$  über die elektrische Betriebsspannung  $U(t)$  für die Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15\text{ N}$ , die Spannungsamplituden  $\hat{U}_2 = 60\text{ V}$  und  $\hat{U}_3 = 100\text{ V}$  und die Frequenzen  $f_1 = 1\text{ Hz}$  und  $f_2 = 27\text{ Hz}$  exemplarisch dargestellt.



**Abbildung 5.4:** Hysterese-Verläufe der gemessenen Stellkraft  $F_a^e$  und -weg  $\Delta z_a^e$  für die Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15\text{ N}$ , die Spannungsamplituden  $\hat{U}_2 = 60\text{ V}$  und  $\hat{U}_3 = 100\text{ V}$  und die Balkensteifigkeit  $K_1$  in

- a) für die Frequenz  $f_1 = 1\text{ Hz}$
- b) für die Frequenz  $f_2 = 27\text{ Hz}$
- c) für die Frequenz  $f_1 = 1\text{ Hz}$
- d) für die Frequenz  $f_2 = 27\text{ Hz}$

---

Die Hysterese-Verläufe in Abbildung 5.4 werden mit zunehmender Frequenz  $f$  und elektrischen Spannungsamplitude  $\hat{U}$  größer [49]. Die Maximalwerte der Stellkräfte und -wege der gemessenen Verläufe  $F_a^e(t)$  und  $\Delta z_a^e(t)$  in Abbildung 5.4 sind jedoch für die beiden Frequenzen  $f_1$  und  $f_2$  nahezu gleich.

Die Tabellen 5.2 und 5.3 zeigen die gemessenen Stellkräfte und -wege  $F_a^e$  und  $\Delta z_a^e$  der experimentellen Arbeitspunkte aller durchgeführten Messungen mit ihren Streuungen für die Frequenzen  $f_1 = 1 \text{ Hz}$  und  $f_2 = 27 \text{ Hz}$ . Die angegebenen Stellkräfte und -wege  $F_{a,n}^e$  und  $\Delta z_{a,n}^e$  sind die arithmetischen Mittelwerte für die untersuchten Stapelaktuatoren und Balken.

**Tabelle 5.2:** Gemessene Stellkräfte und -wege  $F_{a,n}^e$  und  $\Delta z_{a,n}^e$  der Stapelaktuatoren mit ihren Streuungen  $\hat{F}_{a,n}^e - \tilde{F}_{a,n}^e$  und  $\Delta \hat{z}_{a,n}^e - \Delta \tilde{z}_{a,n}^e$  für die Ansteuerungsfrequenz  $f_1 = 1 \text{ Hz}$ ,  $n = 1, 2, 3$

|             | $K_1$              |                            |  | $K_2$   |                    |                            | $K_3$  |   |                    |                            |  |   |  |
|-------------|--------------------|----------------------------|--|---|--------------------|----------------------------|--|---|--------------------|----------------------------|--|---|--|
|             | $F_{a,1}^e$<br>[N] | $\Delta z_{a,1}^e$<br>[μm] | $\hat{F}_{a,1}^e - \tilde{F}_{a,1}^e$<br>[N] | $\Delta z_{a,1}^e - \Delta z_{a,1}^e$<br>[μm] | $F_{a,2}^e$<br>[N] | $\Delta z_{a,2}^e$<br>[μm] | $\hat{F}_{a,2}^e - \tilde{F}_{a,2}^e$<br>[N] | $\Delta z_{a,2}^e - \Delta z_{a,2}^e$<br>[μm] | $F_{a,3}^e$<br>[N] | $\Delta z_{a,3}^e$<br>[μm] | $\hat{F}_{a,3}^e - \tilde{F}_{a,3}^e$<br>[N] | $\Delta z_{a,3}^e - \Delta z_{a,3}^e$<br>[μm] |  |
| $F_{v,1}$   |                    |                            |  |   |                    |                            |  |   |                    |                            |  |   |  |
| $\hat{U}_1$ | 15,45              | 6,62                       | 0,34   | 2,52  | 17,73              | 6,12                       | 1,99   | 1,28  | 21,84              | 4,62                       | 4,05   | 2,11  |  |
| $\hat{U}_2$ | 15,56              | 10,87                      | 0,44   | 2,75  | 19,16              | 9,83                       | 1,70   | 1,99  | 25,87              | 7,43                       | 3,84   | 2,66  |  |
| $\hat{U}_3$ | 15,98              | 19,08                      | 0,70   | 4,45  | 22,04              | 17,46                      | 1,53   | 4,12  | 33,84              | 13,43                      | 4,17   | 5,20  |  |
| $\hat{U}_4$ | 16,45              | 26,76                      | 0,97   | 7,06  | 24,60              | 24,54                      | 1,94   | 5,24  | 40,91              | 19,11                      | 6,65   | 7,71  |  |
| $\hat{U}_5$ | 16,86              | 35,90                      | 1,07   | 7,67  | 27,66              | 33,16                      | 2,42   | 7,84  | 49,48              | 25,94                      | 10,20  | 10,07   |  |
| $F_{v,2}$   |                    |                            |  |   |                    |                            |  |   |                    |                            |  |   |  |
| $\hat{U}_1$ | 20,42              | 6,58                       | 0,32   | 1,45  | 22,89              | 5,92                       | 1,31   | 1,41  | 28,00              | 4,84                       | 3,94   | 2,05  |  |
| $\hat{U}_2$ | 20,56              | 10,66                      | 0,36   | 2,31  | 24,37              | 9,84                       | 1,39   | 1,93  | 32,38              | 7,91                       | 4,59   | 2,96  |  |
| $\hat{U}_3$ | 21,01              | 18,93                      | 0,54   | 3,81  | 27,30              | 17,70                      | 1,54   | 3,84  | 40,74              | 14,03                      | 6,22   | 5,07  |  |
| $\hat{U}_4$ | 21,39              | 26,63                      | 0,54   | 5,85  | 29,90              | 24,92                      | 1,90   | 5,20  | 48,29              | 19,76                      | 7,86   | 6,93  |  |
| $\hat{U}_5$ | 21,79              | 35,73                      | 0,79   | 8,29  | 33,04              | 33,73                      | 2,91   | 7,57  | 57,29              | 26,99                      | 10,37  | 8,61  |  |

**Legende**

Spannungsniveaus:  $\hat{U}_1 = 40 \text{ V}$ ,  $\hat{U}_2 = 60 \text{ V}$ ,  $\hat{U}_3 = 100 \text{ V}$ ,  $\hat{U}_4 = 140 \text{ V}$ ,  $\hat{U}_5 = 195 \text{ V}$   
 nominale Balkensteifigkeiten:  $K_1 = 0,05 \text{ N}/\mu\text{m}$ ,  $K_2 = 0,39 \text{ N}/\mu\text{m}$ ,  $K_3 = 1,33 \text{ N}/\mu\text{m}$   
 nominale Vorspannkraft:  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$ ,  $F_{v,2} = 20 \text{ N}$



**Tabelle 5.3:** Gemessene Stellkräfte und -wege  $F_{a,n}^e$  und  $\Delta z_{a,n}^e$  der Stapelaktuatoren mit ihren Streuungen  $\hat{F}_{a,n}^e - \check{F}_{a,n}^e$  und  $\Delta z_{a,n}^e - \Delta \check{z}_{a,n}^e$  für die Ansteuerungsfrequenz  $f_2 = 27 \text{ Hz}$ ,  $n = 1, 2, 3$

|             | $K_1$              |                            |  |   | $K_2$              |                            |  |   | $K_3$              |                            |  |   |
|-------------|--------------------|----------------------------|--|---|--------------------|----------------------------|--|---|--------------------|----------------------------|--|---|
|             | $F_{a,1}^e$<br>[N] | $\Delta z_{a,1}^e$<br>[μm] | $\hat{F}_{a,1}^e - \check{F}_{a,1}^e$<br>[N] | $\Delta \hat{z}_{a,1}^e - \Delta \check{z}_{a,1}^e$<br>[μm] | $F_{a,2}^e$<br>[N] | $\Delta z_{a,2}^e$<br>[μm] | $\hat{F}_{a,2}^e - \check{F}_{a,2}^e$<br>[N] | $\Delta \hat{z}_{a,2}^e - \Delta \check{z}_{a,2}^e$<br>[μm] | $F_{a,3}^e$<br>[N] | $\Delta z_{a,3}^e$<br>[μm] | $\hat{F}_{a,3}^e - \check{F}_{a,3}^e$<br>[N] | $\Delta \hat{z}_{a,3}^e - \Delta \check{z}_{a,3}^e$<br>[μm] |
| $F_{v,1}$   |                    |                            |  |   |                    |                            |  |   |                    |                            |  |   |
| $\hat{U}_1$ | 15,55              | 5,94                       | 0,75   | 1,79  | 17,06              | 5,97                       | 0,90   | 1,79  | 21,73              | 4,68                       | 4,09   | 3,03  |
| $\hat{U}_2$ | 15,79              | 10,04                      | 0,81   | 2,47  | 18,16              | 9,66                       | 0,82   | 2,47  | 25,52              | 7,42                       | 4,34   | 3,07  |
| $\hat{U}_3$ | 16,25              | 18,08                      | 0,86   | 4,35  | 20,35              | 17,36                      | 1,00   | 4,35  | 33,72              | 14,41                      | 8,15   | 9,35  |
| $\hat{U}_4$ | 16,70              | 25,60                      | 1,06   | 5,61  | 22,30              | 24,66                      | 1,07   | 5,61  | 38,95              | 19,32                      | 7,34   | 6,57  |
| $\hat{U}_5$ | 17,29              | 34,67                      | 1,28   | 6,91  | 24,53              | 33,64                      | 1,57   | 6,91  | 46,15              | 26,18                      | 9,68   | 8,72  |
| $F_{v,2}$   |                    |                            |  |   |                    |                            |  |   |                    |                            |  |   |
| $\hat{U}_1$ | 20,59              | 6,15                       | 0,60   | 1,20  | 22,24              | 5,76                       | 2,14   | 1,20  | 27,55              | 4,64                       | 2,94   | 1,61  |
| $\hat{U}_2$ | 20,82              | 10,07                      | 0,61   | 2,05  | 23,38              | 9,65                       | 2,12   | 2,05  | 31,45              | 7,67                       | 3,26   | 2,48  |
| $\hat{U}_3$ | 21,28              | 18,17                      | 0,68   | 3,28  | 25,64              | 17,47                      | 2,07   | 3,28  | 39,04              | 13,73                      | 4,48   | 3,99  |
| $\hat{U}_4$ | 21,72              | 25,77                      | 0,92   | 4,69  | 27,66              | 25,12                      | 2,06   | 4,69  | 45,81              | 19,59                      | 6,00   | 5,90  |
| $\hat{U}_5$ | 22,30              | 34,79                      | 1,28   | 7,12  | 30,04              | 34,21                      | 2,50   | 7,12  | 53,50              | 26,75                      | 7,64   | 7,81  |

Legende

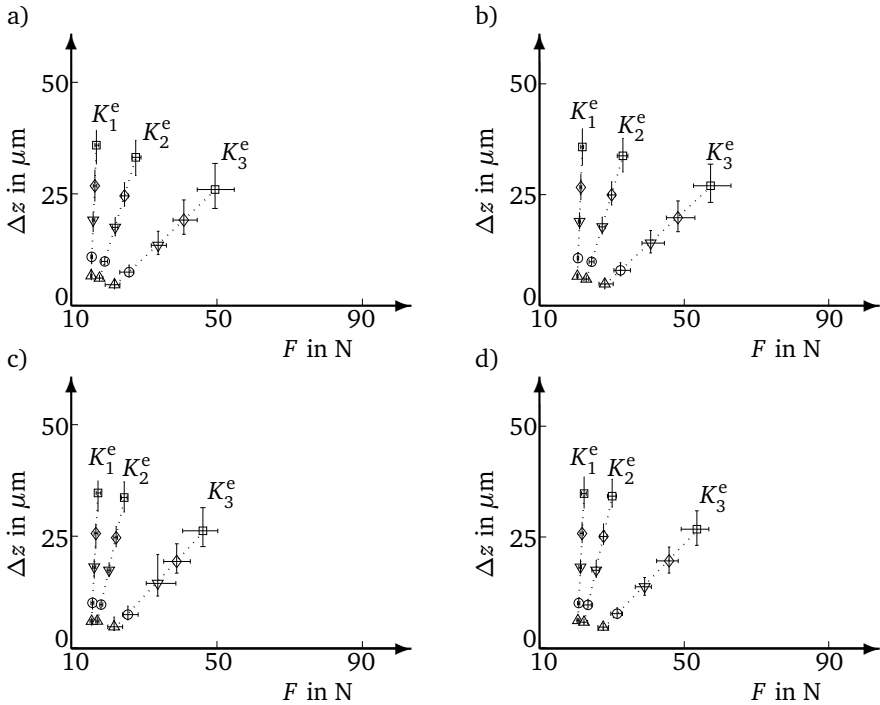
Spannungsamplituden:  $\hat{U}_1 = 40 \text{ V}$ ,  $\hat{U}_2 = 60 \text{ V}$ ,  $\hat{U}_3 = 100 \text{ V}$ ,  $\hat{U}_4 = 140 \text{ V}$ ,  $\hat{U}_5 = 195 \text{ V}$

nominale Balkensteifigkeiten:  $K_1 = 0,05 \text{ N}/\mu\text{m}$ ,  $K_2 = 0,39 \text{ N}/\mu\text{m}$ ,  $K_3 = 1,33 \text{ N}/\mu\text{m}$

nominale Vorspannkkräfte:  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$ ,  $F_{v,2} = 20 \text{ N}$

Die Streuungen der gemessenen Stellkräfte und -wege  $F_a^e$  und  $\Delta z_a^e$  werden als die Differenzen zwischen den Grenzwerten  $\hat{F}_a^e - \check{F}_a^e$  und  $\Delta \hat{z}_a^e - \Delta \check{z}_a^e$  quantifiziert. Diese Grenzwerte  $[\hat{F}_a^e; \check{F}_a^e]$  und  $[\Delta \hat{z}_a^e; \Delta \check{z}_a^e]$  sind die minimalen und maximalen Werte der gemessenen Arbeitspunkte.

Abbildung 5.5 zeigt die experimentell ermittelten Arbeitsdiagramme der Stapelaktuatoren für die experimentellen Balkensteifigkeiten  $K_1^e$ ,  $K_2^e$  und  $K_3^e$ , die Vorspannkraft  $F_{v,1}=15\text{ N}$  und  $F_{v,2}=20\text{ N}$  und die Frequenzen  $f_1=1\text{ Hz}$  und  $f_2=27\text{ Hz}$ .



**Abbildung 5.5:** Experimentelle Arbeitspunkte der Stapelaktuatoren und ihre Streuungen  $\mathbb{I}$ , mit  $\triangle$  für  $\hat{U}_1=40\text{ V}$ ,  $\circ$  für  $\hat{U}_2=60\text{ V}$ ,  $\diamond$  für  $\hat{U}_3=100\text{ V}$ ,  $\nabla$  für  $\hat{U}_4=140\text{ V}$ ,  $\square$  für  $\hat{U}_5=195\text{ V}$ , für die Balkensteifigkeiten  $K_1^e$ ,  $K_2^e$  und  $K_3^e$  in

a) für die Vorspannkraft  $F_{v,1}=15\text{ N}$  und die Frequenz  $f_1=1\text{ Hz}$

b) für die Vorspannkraft  $F_{v,2}=20\text{ N}$  und die Frequenz  $f_1=1\text{ Hz}$

c) für die Vorspannkraft  $F_{v,1}=15\text{ N}$  und die Frequenz  $f_2=27\text{ Hz}$

d) für die Vorspannkraft  $F_{v,2}=20\text{ N}$  und die Frequenz  $f_2=27\text{ Hz}$

Der wesentliche Unterschied zwischen den experimentellen Arbeitsdiagrammen bei den Frequenzen  $f_1 = 1 \text{ Hz}$  und  $f_2 = 27 \text{ Hz}$  in Abbildung 5.5 liegt in die experimentellen Balkensteifigkeiten  $K^e$ . Diese experimentellen Balkensteifigkeiten werden als Steigungen der Regressionsgeraden aus linearer Interpolation über die experimentellen Arbeitspunkte jedes Balkens mit

$$1/K^e = \frac{\sum_{m=1}^5 (F_{a,m}^e - \bar{F}_a^e)(\Delta z_{a,m}^e - \Delta \bar{z}_a^e)}{\sum_{m=1}^5 (F_{a,m}^e - \bar{F}_a^e)^2}, \quad (5.2)$$

mit den gemessenen Stellkräften und -wegen  $F_{a,m}^e$  und  $\Delta z_{a,m}^e$  für die Spannungsamplitude  $\hat{U}_m$  in den Tabellen 5.2 und 5.3 und ihren Mittelwerten

$$\bar{F}_a^e = \frac{1}{5} \sum_{m=1}^5 F_{a,m}^e \quad \text{und} \quad \Delta \bar{z}_a^e = \frac{1}{5} \sum_{m=1}^5 \Delta z_{a,m}^e. \quad (5.3)$$

ermittelt [57]. Tabelle 5.4 zeigt die Werte der experimentellen Balkensteifigkeiten in Abbildung 5.5.

**Tabelle 5.4:** Experimentelle Balkensteifigkeiten  $K_1^e$ ,  $K_2^e$  und  $K_3^e$  mit ihren Nominalwerten  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$  aus Tabelle 4.3

|       |           | $K_1^e$<br>[N/ $\mu\text{m}$ ] | $K_2^e$<br>[N/ $\mu\text{m}$ ] | $K_3^e$<br>[N/ $\mu\text{m}$ ] | $K_1$<br>[N/ $\mu\text{m}$ ] | $K_2$<br>[N/ $\mu\text{m}$ ] | $K_3$<br>[N/ $\mu\text{m}$ ] |
|-------|-----------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| $f_1$ | $F_{v,1}$ | 0,051                          | 0,368                          | 1,298                          | 0,050                        | 0,360                        | 1,330                        |
|       | $F_{v,2}$ | 0,048                          | 0,364                          | 1,331                          |                              |                              |                              |
| $f_2$ | $F_{v,1}$ | 0,060                          | 0,271                          | 1,140                          |                              |                              |                              |
|       | $F_{v,2}$ | 0,059                          | 0,274                          | 1,186                          |                              |                              |                              |

Die Unterschiede zwischen den experimentellen und nominalen Balkensteifigkeiten  $K^e$  und  $K$  sind bei der Frequenz  $f_1 = 1 \text{ Hz}$  relativ klein mit  $\approx 2\%$  und sie nehmen bei der Frequenz  $f_2 = 27 \text{ Hz}$  bis  $\approx 25\%$  zu. Hier zeigt sich das dynamische Verhalten der untersuchten Balken, die bei den Frequenzen  $f_2$  und  $f_1$  unterschiedliche Schwingungsamplituden haben können.

Die Streuungen der gemessenen Stellkräfte und -wege in den Tabellen 5.2 und 5.3 stellen die Auswirkungen der tatsächlichen Unsicherheit dar, die u. a. aus den Streuungen in den Eigenschaften der untersuchten Stapelaktuatoren und Balken sowie aus Messunsicherheit in den verwendeten Sensoren im experimentellen aktiven System besteht.

## 5.2 Beschreibung der Unsicherheit im experimentellen aktiven System

Die gemessenen Eigenschaften der untersuchten Stapelaktuatoren und Balken werden beschrieben und mit den Nominalwerten in Abschnitt 4.1 verglichen. Die Messunsicherheit in den verwendeten Kraft- und Abstandssensoren in Tabelle 5.1 wird auch als zusätzliche Unsicherheit in den experimentellen Untersuchungen beschrieben.

### 5.2.1 Gemessene Aktuator- und Balkeneigenschaften

Tabelle 5.5 zeigt die gemessenen Eigenschaften der untersuchten Stapelaktuatoren und Balken im Versuchsstand in Abbildung 5.1 mit ihren Streuungen.

**Tabelle 5.5:** Gemessene Eigenschaften der untersuchten Stapelaktuatoren und Balken mit ihren jeweiligen Streuungen

| Eigenschaft                                 | Mittelwert         | Grenzwerte                 | Streuung           |
|---|--------------------|----------------------------|--------------------|
| Stapelaktuatoren, Typ 3 9999-62             |                    |                            |                    |
| Blockierkraft $F_B^e$                       | 1012,2 N           | [904,5; 1126,1] N          | −10,6 % bis +11 %  |
| max. freier Stellweg<br>$\Delta z_{\max}^e$ | 44,8 $\mu\text{m}$ | [42,1; 48,1] $\mu\text{m}$ | −3,5 % bis +6,8 %  |
| Vorspannkraft $F_{v,1}^e$                   | 15,6 N             | [13,9; 17,6] N             | −7,3 % bis +17,3 % |
| Vorspannkraft $F_{v,2}^e$                   | 21,1 N             | [19,5; 23,7] N             | −2,5 % bis +18,5 % |
| Balken                                      |                    |                            |                    |
| Angriffspunkt $x_a^e$<br>der aktiven Kraft  | 22+0,01 mm         | -                          | -                  |
| Breite $b_1^e$                              | 30−0,02 mm         | -                          | -                  |
| Breite $b_2^e$                              | 30+0,02 mm         | -                          | -                  |
| Breite $b_3^e$                              | 30+0,03 mm         | -                          | -                  |
| Dicke $h_1^e$                               | 1−0,03 mm          | -                          | -                  |
| Dicke $h_2^e$                               | 2−0,01 mm          | -                          | -                  |
| Dicke $h_3^e$                               | 3−0,05 mm          | -                          | -                  |

Die Blockierkräfte  $F_B^e$  und maximalen freien Stellwege  $\Delta z_{\max}^e$  der untersuchten Stapelaktuatoren vom Typ 3 9999-62 werden im aixCMA-Prüfstand zur Charakterisierung von piezoelektrischen Stapelaktuatoren [4] mit einer mechanischen

Vorspannung von 15 MPa an jedem Stapelaktuator, einer maximalen zulässigen elektrischen Betriebsspannung  $U_{\max} = 200\text{ V}$  und einer konstanten Temperatur von  $19^\circ\text{C}$  gemäß ihren Datenblattangaben [11] gemessen. Tabelle 5.6 zeigt die gemessenen Blockierkräfte und max. freien Stellwege der sieben untersuchten Stapelaktuatoren.

**Tabelle 5.6:** Mittelwerte und Standardabweichungen der gemessenen Blockierkräfte und maximalen freien Stellwege der untersuchten Stapelaktuatoren

| Nr.<br>$r$ | Blockierkraft $F_B^e$ [N] |                     | max. freier Stellweg $\Delta z_{\max}^e$ [ $\mu\text{m}$ ] |                                  |
|------------|---------------------------|---------------------|--|----------------------------------|
|            | $\bar{F}_B^{e,r}$         | $\sigma_{FB}^{e,r}$ | $\Delta \bar{z}_{\max}^{e,r}$                              | $\sigma_{\Delta z_{\max}}^{e,r}$ |
| 1          | 1126,1                    | 51,6                | 44,4   | 2,2                              |
| 2          | 1109,3                    | 48,1                | 43,4   | 3,1                              |
| 3          | 904,5                     | 55,2                | 42,1   | 2,8                              |
| 4          | 995,7                     | 51,5                | 48,1   | 2,2                              |
| 5          | 1007,1                    | 49,4                | 45,6   | 4,1                              |
| 6          | 932,4                     | 43                  | 46,2   | 1,9                              |
| 7          | 1010,5                    | 50,2                | 44,2   | 2,5                              |

Die untersuchten Stapelaktuatoren haben unterschiedliche Blockierkräfte  $\bar{F}_B^{e,r}$  und maximale freie Stellwege  $\Delta \bar{z}_{\max}^{e,r}$ .

Die Grenzwerte  $[\check{F}_B^e; \hat{F}_B^e] = [904,5; 1126,1]\text{ N}$  der gemessenen Blockierkräfte  $\bar{F}_B^e$  zeigen eine Streuung von  $-10,6\%$  bis  $+11\%$  um den Gesamtmittelwert  $\bar{F}_B^e = 1012,2\text{ N}$ . Damit ist die Streuung in den gemessenen Blockierkräften  $F_B^e$  in Tabelle 5.5 mit dem Wert  $\pm 10\%$  in Tabelle 4.2 nahezu gleich und der Gesamtmittelwert  $\bar{F}_B^e = 1012,2\text{ N}$  ist  $22\%$  größer als der Nominalwert  $F_B = 900\text{ N}$ .

Die Grenzwerte  $[\Delta \check{z}_{\max}^e; \Delta \hat{z}_{\max}^e] = [42,1; 48,1]\mu\text{m}$  der gemessenen maximalen freien Stellwege  $\Delta \bar{z}_{\max}^e$  zeigen eine Streuung von  $-3,5\%$  bis  $+6,8\%$  um den Gesamtmittelwert  $\Delta \bar{z}_{\max}^e = 44,8\mu\text{m}$ . Damit ist die Streuung in den gemessenen maximalen freien Stellwegen  $\Delta \bar{z}_{\max}^e$  kleiner als der Wert von  $\pm 10\%$  in Tabelle 4.2 und der Gesamtmittelwert  $\Delta \bar{z}_{\max}^e = 44,8\mu\text{m}$  ist  $\approx 0,4\%$  kleiner als der Nominalwert  $\Delta z_{\max} = 45\mu\text{m}$ .

Die Mittelwerte der gemessenen Vorspannkräfte  $\bar{F}_{v,1}^e = 15,6\text{ N}$  und  $\bar{F}_{v,2}^e = 21,1\text{ N}$  in Tabelle 5.5 werden aus der Auswertung aller durchgeführten Messungen gewonnen. Die Streuungen von  $-7,3\%$  bis  $+17,3\%$  und  $-2,5\%$  bis  $+18,5\%$  um die Gesamtmittelwerte  $\bar{F}_{v,1}^e$  und  $\bar{F}_{v,2}^e$  sind nicht symmetrisch wie die angenommenen

---

Streuungen von  $\pm 10\%$  in Tabelle 4.2. Die Variationen in den gemessenen Vorspannkraften zeigen, dass Ungenauigkeiten in der manuellen Einstellung der Vorspannkraft in der Einspannvorrichtung in Abbildung 5.3 vorhanden sind. Diese Ungenauigkeiten können z. B. durch Setzeffekte in den Schraubenverbindungen der Einspannvorrichtung und/oder eine ungenaue Einstellung der Vorspannkraft verursacht werden.

Der Angriffspunkt  $x_a^e = 22 \pm 0,1 \text{ mm}$  in Tabelle 5.5 wird mit einem Messschieber in der Einspannvorrichtung in Abbildung 5.1 gemessen, vgl. mit  $x_a$  in Abbildung 2.7a. Dieser gemessene Wert liegt im Bereich der angenommenen Streuung von  $\pm 0,1 \text{ mm}$  in Tabelle 4.2. In Tabelle 5.5 werden keine Grenzwerte und Streuung für den Angriffspunkt  $x_a^e$  der aktiven Kraft des Stapelaktuators auf den Balken angegeben, weil dieser Abstand durch die Halterungen 15 und den Stempel 13 in der Einspannvorrichtung für alle Balken gleich ist, siehe Abbildung 5.3.

Die Breiten  $b_n^e$  und Dicken  $h_n^e$  der drei Balken in Tabelle 5.5 werden stichprobenartig an der Stelle  $x = x_a^e$  in Abbildung 2.7a mit einer Mikrometerschraube gemessen,  $n = 1, 2, 3$ . Die gemessenen Breiten und Dicken der drei Balken in Tabelle 5.5 liegen in den Toleranzen, die von der Norm für Allgemeintoleranzen [14] angegeben werden, siehe Tabelle 4.2. Tabelle 5.5 enthält keine Grenzwerte und Streuungen für die Breiten  $b_n^e$  und die Dicken  $h_n^e$  der Balken, weil die drei Balken Einzelteile sind und Streuungen aus wiederholten Messungen beider geometrischen Abmessungen eher die Unsicherheit im Messprozess beschreiben würden. Die Balkeneigenschaften  $x_a^e$ ,  $b_n^e$  und  $h_n^e$  liegen in den Toleranzen aus der DIN ISO 2768-1 in Tabelle 4.2.

Die Streuungen der gemessenen Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 5.5 sind, insgesamt, kleiner als ihre angenommenen Werte der Worst-Case Analysen und MCS in Abschnitt 4.2. Aus diesem Grund sollten die numerischen und gemessenen Stellkräfte und -wege gut miteinander übereinstimmen. Die Variationen in den gemessenen Stellkräften und -wegen der untersuchten Stapelaktuatoren sollten kleiner als ihre numerische Werte aus den Worst-Case Analysen und MCS in den Tabellen 4.3 und 4.5 bis 4.7 sein. Der Vergleich zwischen den numerischen und gemessenen Stellkräften und -wegen wird in Abschnitt 5.3.1 durchgeführt.

Die Streuungen der gemessenen Stellkräfte und -wege in den Tabellen 5.2 und 5.3 werden auch durch Messunsicherheit in den verwendeten Kraft- und Wegmesssystemen in Tabelle 5.1 verursacht. Diese Messunsicherheit wird im nächsten Abschnitt untersucht.

---

## 5.2.2 Messunsicherheit in den Kraft- und Wegmesssystemen

---

Die Messunsicherheit wird anhand von Wiederholungsmessungen eines einzelnen Stapelaktuators beschrieben. Die Ursachen der Messunsicherheit sind vielfältig wie Drift, Kriechen, Nullpunktabweichung und Querkrafteinfluss im Kraftaufnehmer, eine Veränderung der reflektierenden Oberfläche des Balkens und die Empfindlichkeiten des Kraftaufnehmers und des Laser-Triangulationssensors. Eine falsche Kalibrierung des Kraftaufnehmers wird vermieden, in dem dieser vor jeder Messung entlastet wird und am PICAS Messverstärker, Position 5 in Abbildung 5.1, kalibriert wird. Variationen in der Positionierung des Laser-Triangulationssensors im aktiven System werden vermieden, da dieser beim Ein- und Ausbau der Stapelaktuatoren und Balken in die Einspannvorrichtung aus Abbildung 5.3 nicht bewegt wird. Die technischen Daten des eingesetzten Kraftaufnehmers und Laser-Triangulationssensors sind im Anhang A.3 angegeben und Unsicherheiten in derer Nutzung werden in [6, 58, 16] ausführlicher behandelt.

Die Tabellen 5.7 und 5.8 zeigen die gemessenen Stellkräfte und -wege zweier Stapelaktuatoren Nr. 1 und Nr. 6 für die Frequenzen  $f_1 = 1 \text{ Hz}$  und  $f_2 = 27 \text{ Hz}$ . Die Streuungen der gemessenen Stellkräfte und -wege aus den Wiederholungsmessungen in den Tabellen 5.7 und 5.8 sind viel kleiner als ihre jeweiligen Werte in den Tabellen 5.2 und 5.3. Für die beiden Tabellen 5.7 und 5.8 beträgt die maximale Streuung in den gemessenen Stellkräften  $1,72 \text{ N}$ . Dieser Maximalwert gilt für die Balkensteifigkeit  $K_3$ , die Vorspannkraft  $F_{v,2}$  und die Spannungsamplitude  $\hat{U}_5$  in Tabelle 5.7 und er ist 6 mal kleiner als sein jeweiliger Wert  $10,37 \text{ N}$  in Tabelle 5.2. Für die beiden Tabellen 5.7 und 5.8 beträgt die maximale Streuung in den gemessenen Stellwegen  $0,49 \mu\text{m}$ . Dieser Maximalwert gilt für Balkensteifigkeit  $K_3$ , die Vorspannkraft  $F_{v,1}$  und die Spannungsamplitude  $\hat{U}_3$  in Tabelle 5.7 und er ist 19 mal kleiner als sein jeweiliger Wert  $9,35 \mu\text{m}$  in Tabelle 5.2.

Diese Erkenntnisse zeigen, dass die Streuungen der gemessenen Stellkräfte und -wege in den experimentellen Arbeitsdiagrammen in Abbildung 5.5 viel stärker durch die tatsächlichen Streuungen in den Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 5.5 als durch Messunsicherheit in den verwendeten Kraft- und Wegmesssystemen in Abbildung 5.1 verursacht werden.

Im nächsten Abschnitt dieses Kapitels werden die Einflüsse der tatsächlichen Streuungen der Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 5.5 auf die Streuungen in den gemessenen Stellkräften und -wegen untersucht. Ein Vergleich zwischen den nominalen und experimentellen Arbeitspunkten wird durchgeführt und die numerischen Ergebnisse aus den Worst-Case Analysen und MCS in Kapitel 4 werden anhand der gewonnenen Messergebnisse überprüft.

**Tabelle 5.7: Gemessene Stellkräfte und -wege  $F_{a,1}^{e,1}$  und  $\Delta z_{a,1}^{e,1}$  des Stapelaktuators Nr. 1 mit ihren Streuungen  $\hat{F}_{a,1}^{e,1} - \tilde{F}_{a,1}^{e,1}$  und  $\Delta \hat{z}_{a,1}^{e,1} - \Delta \tilde{z}_{a,1}^{e,1}$  für die Ansteuerungsfrequenz  $f_1 = 1 \text{ Hz}$ ,  $n = 1, 2, 3$**

| $F_{v,1}$   |                        |                                |  |   |                        |                                |  |   |                        |                                |  |   |
|-------------|------------------------|--------------------------------|--|---|------------------------|--------------------------------|--|---|------------------------|--------------------------------|--|---|
|             | $K_1$                  |                                |  |   | $K_2$                  |                                |  |   | $K_3$                  |                                |  |   |
|             | $F_{a,1}^{e,1}$<br>[N] | $\Delta z_{a,1}^{e,1}$<br>[μm] | $\hat{F}_{a,1}^{e,1} - \tilde{F}_{a,1}^{e,1}$<br>[N] | $\Delta \hat{z}_{a,1}^{e,1} - \Delta \tilde{z}_{a,1}^{e,1}$<br>[μm] | $F_{a,2}^{e,1}$<br>[N] | $\Delta z_{a,2}^{e,1}$<br>[μm] | $\hat{F}_{a,2}^{e,1} - \tilde{F}_{a,2}^{e,1}$<br>[N] | $\Delta \hat{z}_{a,2}^{e,1} - \Delta \tilde{z}_{a,2}^{e,1}$<br>[μm] | $F_{a,3}^{e,1}$<br>[N] | $\Delta z_{a,3}^{e,1}$<br>[μm] | $\hat{F}_{a,3}^{e,1} - \tilde{F}_{a,3}^{e,1}$<br>[N] | $\Delta \hat{z}_{a,3}^{e,1} - \Delta \tilde{z}_{a,3}^{e,1}$<br>[μm] |
| $\hat{U}_1$ | 15,50                  | 5,73                           | 0,03   | 0,13  | 18,08                  | 5,59                           | 0,04   | 0,18  | 22,00                  | 3,97                           | 0,10   | 0,22  |
| $\hat{U}_2$ | 15,57                  | 9,61                           | 0,09   | 0,27  | 19,37                  | 9,01                           | 0,05   | 0,10  | 26,13                  | 6,73                           | 0,05   | 0,08  |
| $\hat{U}_3$ | 16,22                  | 17,05                          | 0,12   | 0,32  | 21,91                  | 16,20                          | 0,13   | 0,09  | 33,98                  | 12,08                          | 0,33   | 0,49  |
| $\hat{U}_4$ | 16,65                  | 24,07                          | 0,05   | 0,39  | 24,16                  | 22,55                          | 0,11   | 0,22  | 40,42                  | 16,79                          | 0,63   | 0,44  |
| $\hat{U}_5$ | 17,12                  | 32,74                          | 0,07   | 0,47  | 26,87                  | 30,73                          | 0,20   | 0,21  | 48,18                  | 22,96                          | 1,21   | 0,34  |
| $F_{v,2}$   |                        |                                |  |   |                        |                                |  |   |                        |                                |  |   |
| $\hat{U}_1$ | 20,43                  | 6,22                           | 0,04   | 0,04  | 23,55                  | 5,41                           | 0,04   | 0,25  | 28,30                  | 4,25                           | 0,39   | 0,13  |
| $\hat{U}_2$ | 20,62                  | 9,91                           | 0,07   | 0,08  | 24,72                  | 9,35                           | 0,04   | 0,09  | 32,83                  | 6,97                           | 0,02   | 0,11  |
| $\hat{U}_3$ | 21,15                  | 17,58                          | 0,10   | 0,13  | 27,15                  | 16,56                          | 0,12   | 0,12  | 40,88                  | 12,23                          | 0,50   | 0,18  |
| $\hat{U}_4$ | 21,51                  | 25,08                          | 0,07   | 0,22  | 29,08                  | 23,09                          | 0,10   | 0,29  | 47,58                  | 17,43                          | 0,93   | 0,16  |
| $\hat{U}_5$ | 21,98                  | 33,78                          | 0,06   | 0,17  | 31,59                  | 31,60                          | 0,32   | 0,05  | 55,11                  | 23,92                          | 1,71   | 0,29  |

Legende

Spannungsamplituden:  $\hat{U}_1 = 40 \text{ V}$ ,  $\hat{U}_2 = 60 \text{ V}$ ,  $\hat{U}_3 = 100 \text{ V}$ ,  $\hat{U}_4 = 140 \text{ V}$ ,  $\hat{U}_5 = 195 \text{ V}$

nominale Balkensteifigkeiten:  $K_1 = 0,05 \text{ N}/\mu\text{m}$ ,  $K_2 = 0,39 \text{ N}/\mu\text{m}$ ,  $K_3 = 1,33 \text{ N}/\mu\text{m}$

nominale Vorspannkkräfte:  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$ ,  $F_{v,2} = 20 \text{ N}$



**Tabelle 5.8: Gemessene Stellkräfte und -wege  $F_{a,n}^{e,6}$  und  $\Delta z_{a,n}^{e,6}$  des Stapelaktuator Nr. 6 mit ihren Streuungen  $\hat{F}_{a,n}^{e,6} - \check{F}_{a,n}^{e,6}$  und  $\Delta \hat{z}_{a,n}^{e,6} - \Delta \check{z}_{a,n}^{e,6}$  für die Ansteuerungsfrequenz  $f_2 = 27 \text{ Hz}$ ,  $n = 1, 2, 3$**

| $F_{v,1}$   |                        |                                |  |   |                        |                                |  |   |                        |                                |  |   |  |
|-------------|------------------------|--------------------------------|--|---|------------------------|--------------------------------|--|---|------------------------|--------------------------------|--|---|--|
|             | $K_1$                  |                                |  |   | $K_2$                  |                                |  |   | $K_3$                  |                                |  |   |  |
|             | $F_{a,1}^{e,6}$<br>[N] | $\Delta z_{a,1}^{e,6}$<br>[μm] | $\hat{F}_{a,1}^{e,6} - \check{F}_{a,1}^{e,6}$<br>[N] | $\Delta \hat{z}_{a,1}^{e,6} - \Delta \check{z}_{a,1}^{e,6}$<br>[μm] | $F_{a,2}^{e,6}$<br>[N] | $\Delta z_{a,2}^{e,6}$<br>[μm] | $\hat{F}_{a,2}^{e,6} - \check{F}_{a,2}^{e,6}$<br>[N] | $\Delta \hat{z}_{a,2}^{e,6} - \Delta \check{z}_{a,2}^{e,6}$<br>[μm] | $F_{a,3}^{e,6}$<br>[N] | $\Delta z_{a,3}^{e,6}$<br>[μm] | $\hat{F}_{a,3}^{e,6} - \check{F}_{a,3}^{e,6}$<br>[N] | $\Delta \hat{z}_{a,3}^{e,6} - \Delta \check{z}_{a,3}^{e,6}$<br>[μm] |  |
| $\hat{U}_1$ | 15,38                  | 6,43                           | 0,04   | 0,03  | 17,28                  | 6,76                           | 0,05   | 0,03  | 24,06                  | 6,30                           | 0,06   | 0,78  |  |
| $\hat{U}_2$ | 15,59                  | 11,03                          | 0,05   | 0,01  | 18,37                  | 10,69                          | 0,04   | 0,01  | 28,33                  | 9,26                           | 0,07   | 0,06  |  |
| $\hat{U}_3$ | 16,01                  | 19,79                          | 0,01   | 0,06  | 20,51                  | 18,80                          | 0,07   | 0,06  | 35,75                  | 16,37                          | 0,10   | 0,15  |  |
| $\hat{U}_4$ | 16,36                  | 27,75                          | 0,05   | 0,06  | 22,27                  | 26,66                          | 0,06   | 0,06  | 42,63                  | 23,25                          | 0,16   | 0,04  |  |
| $\hat{U}_5$ | 16,89                  | 37,06                          | 0,07   | 0,03  | 24,31                  | 35,86                          | 0,14   | 0,03  | 50,09                  | 31,34                          | 0,27   | 0,07  |  |
| $F_{v,2}$   |                        |                                |  |   |                        |                                |  |   |                        |                                |  |   |  |
| $\hat{U}_1$ | 20,55                  | 6,67                           | 0,04   | 0,04  | 22,16                  | 5,97                           | 0,04   | 0,04  | 28,01                  | 5,29                           | 0,05   | 0,37  |  |
| $\hat{U}_2$ | 20,74                  | 11,02                          | 0,03   | 0,02  | 23,38                  | 9,92                           | 0,07   | 0,02  | 32,42                  | 8,76                           | 0,07   | 0,37  |  |
| $\hat{U}_3$ | 21,16                  | 19,84                          | 0,05   | 0,06  | 25,75                  | 18,34                          | 0,11   | 0,06  | 40,90                  | 15,81                          | 0,06   | 0,04  |  |
| $\hat{U}_4$ | 21,58                  | 28,00                          | 0,07   | 0,07  | 27,72                  | 26,03                          | 0,07   | 0,07  | 48,27                  | 22,70                          | 0,15   | 0,04  |  |
| $\hat{U}_5$ | 22,06                  | 37,98                          | 0,06   | 0,10  | 30,21                  | 35,73                          | 0,24   | 0,10  | 56,69                  | 30,86                          | 0,25   | 0,09  |  |

Legende

Spannungssamplituden:  $\hat{U}_1 = 40 \text{ V}$ ,  $\hat{U}_2 = 60 \text{ V}$ ,  $\hat{U}_3 = 100 \text{ V}$ ,  $\hat{U}_4 = 140 \text{ V}$ ,  $\hat{U}_5 = 195 \text{ V}$

nominale Balkensteifigkeiten:  $K_1 = 0,05 \text{ N}/\mu\text{m}$ ,  $K_2 = 0,39 \text{ N}/\mu\text{m}$ ,  $K_3 = 1,33 \text{ N}/\mu\text{m}$

nominale Vorspannkkräfte:  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$ ,  $F_{v,2} = 20 \text{ N}$

---

## 5.3 Bewertung der Unsicherheit im experimentellen aktiven System

---

Nach der Beschreibung der tatsächlichen Streuungen in den Aktuator- und Balkeneigenschaften im Versuchsstand, werden in diesem Abschnitt die experimentellen und nominalen Arbeitspunkte für den kritischen Arbeitspunkt im aktiven System, d. h. für die Spannungsamplitude  $\hat{U} = 195 \text{ V}$  und  $F_v = 15 \text{ N}$  siehe Abbildung 2.8, miteinander verglichen. Anschließend wird Gültigkeit der numerischen Ergebnisse in Kapitel 4 anhand der gemessenen Stellkräfte und -wege überprüft.

---

### 5.3.1 Vergleich der nominalen und experimentellen Arbeitspunkte

---

Das deterministische Arbeitsdiagramm in Abbildung 4.1 zeigt drei nominalen Arbeitspunkte des Stapelaktuators vom Typ 3 9999-62 mit

- $(F_{a,1}; \Delta z_{a,1}) = (17,20 \text{ N}; 43 \mu\text{m})$  für die Balkensteifigkeit  $K_1$ ,
- $(F_{a,2}; \Delta z_{a,2}) = (31,90 \text{ N}; 42,30 \mu\text{m})$  für die Balkensteifigkeit  $K_2$  und
- $(F_{a,3}; \Delta z_{a,3}) = (69,70 \text{ N}; 40,40 \mu\text{m})$  für die Balkensteifigkeit  $K_3$

bei der Betriebsspannung  $U = 195 \text{ V}$  und der Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$ . Die entsprechenden experimentellen Arbeitspunkte in Abbildung 5.5 bei der Frequenz  $f_1 = 1 \text{ Hz}$  sind:

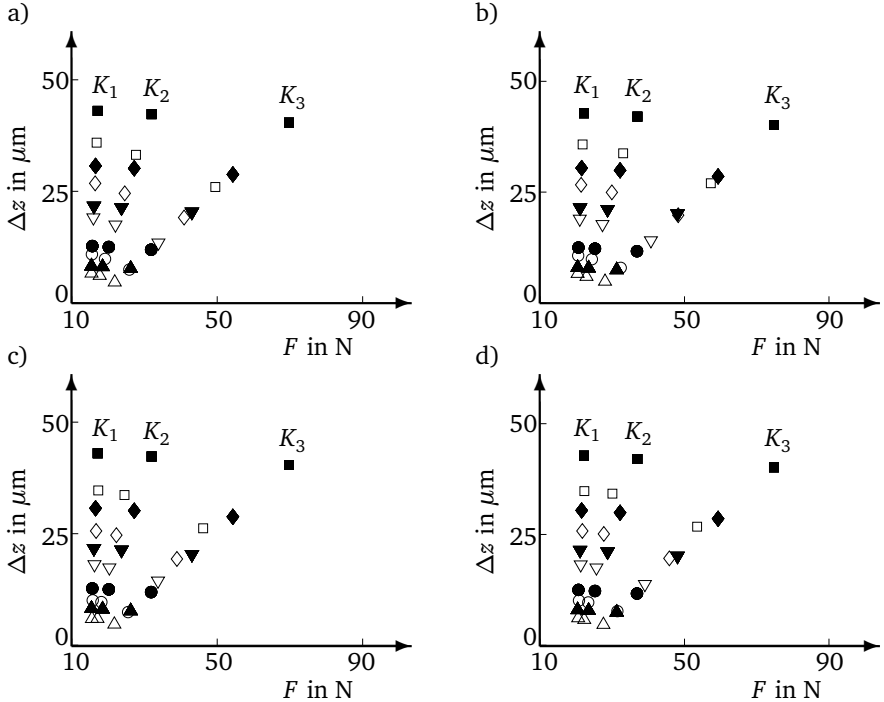
- $(F_{a,1}^e; \Delta z_{a,1}^e) = (16,80 \text{ N}; 35,80 \mu\text{m})$ ,
- $(F_{a,2}^e; \Delta z_{a,2}^e) = (27,60 \text{ N}; 36,90 \mu\text{m})$  und
- $(F_{a,3}^e; \Delta z_{a,3}^e) = (49,40 \text{ N}; 25,90 \mu\text{m})$ , siehe Tabelle 5.2.

Die entsprechenden experimentellen Arbeitspunkte bei der Frequenz  $f_2 = 27 \text{ Hz}$  sind:

- $(F_{a,1}^e; \Delta z_{a,1}^e) = (17,29 \text{ N}; 34,67 \mu\text{m})$ ,
- $(F_{a,2}^e; \Delta z_{a,2}^e) = (24,53 \text{ N}; 33,64 \mu\text{m})$  und
- $(F_{a,3}^e; \Delta z_{a,3}^e) = (46,15 \text{ N}; 26,18 \mu\text{m})$ , siehe Tabelle 5.3.

Die gemessenen Stellkräfte und -wege  $F_{a,n}^e$  und  $\Delta z_{a,n}^e$  sind kleiner als ihre nominalen Werte  $F_{a,n}$  und  $\Delta z_{a,n}$  des deterministischen Arbeitsdiagramms, z. B. mit 2 % und 16 % für die Balkensteifigkeit  $K_1$ , 23,2 % und 20,5 % für die Balkensteifigkeit  $K_2$  und mit 33,7 % und 35 % für die Balkensteifigkeit  $K_3$  bei der Frequenz

$f_1 = 1 \text{ Hz}$ . Abbildung 5.6 zeigt die nominalen und experimentellen Arbeitspunkte der untersuchten Stapelaktuatoren und Balken für die Spannungsamplituden  $\hat{U}_1, \hat{U}_2, \dots, \hat{U}_5$ , die Frequenzen  $f_1 = 1 \text{ Hz}$  und  $f_2 = 27 \text{ Hz}$  und die Vorspannkkräfte  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$  und  $F_{v,2} = 20 \text{ N}$ .



**Abbildung 5.6:** Nominalen und experimentellen Arbeitspunkte mit  $\blacktriangle$  und  $\triangle$  für  $\hat{U}_1 = 40 \text{ V}$ ,  $\bullet$  und  $\circ$  für  $\hat{U}_2 = 60 \text{ V}$ ,  $\blacktriangledown$  und  $\triangledown$  für  $\hat{U}_3 = 100 \text{ V}$ ,  $\blacklozenge$  und  $\lozenge$  für  $\hat{U}_4 = 140 \text{ V}$ ,  $\blacksquare$  und  $\square$  für  $\hat{U}_5 = 195 \text{ V}$  für die Balkensteifigkeiten  $K_1, K_2$  und  $K_3$  in  
a) für die Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$  und die Frequenz  $f_1 = 1 \text{ Hz}$   
b) für die Vorspannkraft  $F_{v,2} = 20 \text{ N}$  und die Frequenz  $f_1 = 1 \text{ Hz}$   
c) für die Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$  und die Frequenz  $f_2 = 27 \text{ Hz}$   
d) für die Vorspannkraft  $F_{v,2} = 20 \text{ N}$  und die Frequenz  $f_2 = 27 \text{ Hz}$

Die numerischen Stellkräfte und -wege der nominalen Arbeitspunkte stimmen für alle Spannungsamplituden  $\hat{U}$  und Vorspannkkräfte  $F_v$  in Abbildung 5.6 mit ihren gemessenen Werten nicht überein. Die Balkensteifigkeiten der untersuchten

---

Balken mit den Dicken  $h_1 = 1 \text{ mm}$ ,  $h_2 = 2 \text{ mm}$  und  $h_3 = 3 \text{ mm}$  sind anhand der experimentellen Arbeitspunkte in Abbildung 5.6 gut erkennbar, siehe Tabelle 5.4.

Die Diskrepanzen zwischen den nominalen und experimentellen Arbeitspunkten in Abbildung 5.6 werden nicht durch die Unterschiede zwischen den Nominal- und gemessenen Aktuator- und Balkeneigenschaften der Tabellen 4.2 und 5.5 verursacht, da z. B. die gemessene Blockierkraft der untersuchten Stapelaktuatoren um 22 % höher als der Nominalwert  $F_b = 900 \text{ N}$  ist, die Streuung ihrer gemessenen maximalen freien Stellwege  $\Delta z_{\text{max}}^e$  mit  $-3,5\%$  bis  $+6,8\%$  kleiner als der angenommene Wert von  $\pm 10\%$  ist und die Breiten  $b^e$  und Dicken  $h^e$  der Balken innerhalb der Toleranzen liegen, siehe Tabelle 5.5. Die erhöhte Streuung der Vorspannkraft  $F_v^e$  in Tabelle 5.5, mit  $+17\%$  kann nicht als Hauptursache dieser Abweichungen gelten, da eine höhere mechanische Vorspannkraft theoretisch zu kleineren Stellwegen und größeren Stellkräften eines Stapelaktuators nach dem Gleichungssystem (2.11) führen sollte.

Die Diskrepanzen zwischen den nominalen und experimentellen Arbeitspunkten in Abbildung 5.6 stellen die Gültigkeit einer linearen Kraft-Weg-Kennlinie eines Stapelaktuators in Gleichung (2.1) infrage [80]. In Gleichung (2.1) der Kraft-Weg-Kennlinie eines Stapelaktuators werden Nichtlinearitäten wie der nichtlineare Verlauf der Dehnung über das elektrische Feld im PZT-Werkstoff nicht berücksichtigt [36]. Der Einfluss der mechanischen Vorspannkraft  $F_v$  auf die Kraft-Weg-Kennlinie bzw. auf die Steifigkeit eines Stapelaktuators wird in Gleichung (2.1) nicht berücksichtigt. Piezoelektrische Stapelaktuatoren können bei geeigneter Vorspannkraft bis zu 60 % höhere Stellwege generieren [59, 92]. So werden z. B. piezoelektrische Stapelaktuatoren, die in einem Gehäuse mithilfe einer Tellerfeder vorgespannt sind, von vielen Herstellern angeboten. Die Vorspannkraft in vorgespannten Stapelaktuatoren ist u. a. von der Geometrie und des Werkstoffs des Stapelaktuators abhängig, so dass sie bei jedem Hersteller und Aktuatortyp unterschiedlich ist.

Piezoelektrische Stapelaktuatoren zeigen eine Selbsterwärmung, die von der Frequenz und der Amplitude der elektrischen Betriebsspannung abhängig ist und niedrigeren Stellwege verursacht [41]. In dieser Arbeit wird die Selbsterwärmung der Stapelaktuatoren aufgrund der kurzzeitigen Messdauer von 10 s pro Messung vernachlässigt.

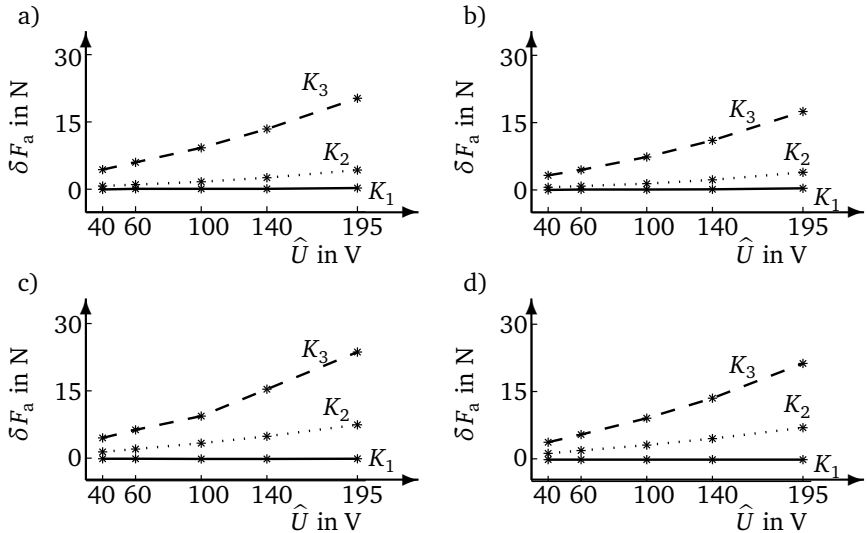
Die Diskrepanzen zwischen den experimentellen und nominalen Arbeitspunkten in Abbildung 5.6 werden auch durch den Versuchsstand in Abbildung 5.1 verursacht. Die Abweichungen zwischen den Stellkräften und -wegen  $\delta F_a$  und  $\delta \Delta z_a$  der Arbeitspunkte in Abbildung 5.6 werden berücksichtigt, um die Einflüsse des Versuchsstands auf die Diskrepanzen zwischen den nominalen und experimentellen Arbeitspunkten zu untersuchen.

Diese Abweichungen werden folgendermaßen ermittelt:

$$\begin{cases} \delta F_a &= F_a - F_a^e \\ \delta \Delta z_a &= \Delta z_a - \Delta z_a^e \end{cases}, \quad (5.4)$$

mit  $F_a$  und  $\Delta z_a$  den numerischen Stellkräften und -wegen der nominalen Arbeitspunkte,  $F_a^e$  und  $\Delta z_a^e$  den gemessenen Stellkräften und -wegen der experimentellen Arbeitspunkte aus den Tabellen 5.2 und 5.3. Die Werte der Abweichungen  $\delta F_a$  und  $\delta \Delta z_a$  sind im Anhang A.5 aufgelistet.

Abbildung 5.7 zeigt die Abweichungen  $\delta F_a$  zwischen den numerischen und den gemessenen Stellkräften der Arbeitspunkte in Abbildung 5.6 über die Spannungsamplitude  $\hat{U}$ .



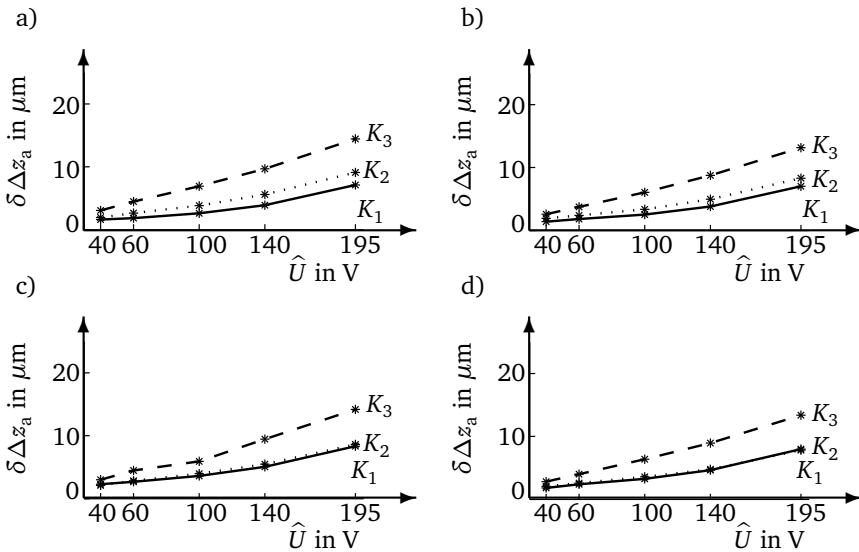
**Abbildung 5.7:** Abweichungen  $\delta F_a$  zwischen den numerischen und gemessenen Stellkräften über die Spannungsamplitude  $\hat{U}$  für die Balkensteifigkeiten  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$  in

- a) für die Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15$  N und die Frequenz  $f_1 = 1$  Hz
- b) für die Vorspannkraft  $F_{v,2} = 20$  N und die Frequenz  $f_1 = 1$  Hz
- c) für die Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15$  N und die Frequenz  $f_2 = 27$  Hz
- d) für die Vorspannkraft  $F_{v,2} = 20$  N und die Frequenz  $f_2 = 27$  Hz

Die Abweichungen  $\delta F_a$  zeigen für die drei Balkensteifigkeiten  $K_1 < K_2 < K_3$  unterschiedliche nichtlineare Verläufe, die mit zunehmender Balkensteifigkeit  $K$

und Spannungsamplitude  $\hat{U}$  steigen, z. B. von 0,01 N bis 0,3 N, von 0,7 N bis 4,3 N und von 4,4 N bis 20,3 N für die Balkensteifigkeiten  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$  in Abbildung 5.7a. Die Zunahme der Abweichungen  $\delta F_a$  mit steigender Balkensteifigkeit  $K$  entsteht aufgrund der endlichen Steifigkeit der Einspannvorrichtung, die bei der Ermittlung der numerischen Arbeitspunkte mit dem Arbeitsdiagramm als theoretisch starr angenommen wird. Diese Annahme gilt für den Balken mit der Dicke  $h_1 = 1 \text{ mm}$  und die maximale Abweichung  $\delta F_a$  für  $K_1$  in Abbildung 5.7 beträgt  $\approx 0,4 \text{ N}$ . Die Abweichungen  $\delta F_a$  steigen mit zunehmender Spannungsamplitude  $\hat{U}$  aufgrund des nichtlinearen Verhaltens vom PZT-Werkstoff, das bei höheren Spannungsamplituden bzw. Feldstärken vorhanden ist.

Abbildung 5.8 zeigt die Abweichungen  $\delta \Delta z_a$  zwischen den numerischen und gemessenen Stellwegen der Arbeitspunkte in Abbildung 5.6 über die Spannungsamplitude  $\hat{U}$ .



**Abbildung 5.8:** Abweichungen  $\delta \Delta z_a$  zwischen den numerischen und gemessenen Stellwegen über die Spannungsamplitude  $\hat{U}$  für die Balkensteifigkeiten  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$  in

a) für die Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$  und die Frequenz  $f_1 = 1 \text{ Hz}$

b) für die Vorspannkraft  $F_{v,2} = 20 \text{ N}$  und die Frequenz  $f_1 = 1 \text{ Hz}$

c) für die Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$  und die Frequenz  $f_2 = 27 \text{ Hz}$

d) für die Vorspannkraft  $F_{v,2} = 20 \text{ N}$  und die Frequenz  $f_2 = 27 \text{ Hz}$

Die Abweichungen  $\delta\Delta z_a$  zeigen für die drei Balkensteifigkeiten  $K_1 < K_2 < K_3$  unterschiedliche nichtlineare Verläufe, die mit zunehmender Balkensteifigkeit  $K$  und elektrischen Spannungsamplitude  $\hat{U}$  steigen, z. B. von  $1,6\mu\text{m}$  bis  $7,1\mu\text{m}$ , von  $1,9\mu\text{m}$  bis  $7,1\mu\text{m}$  und von  $3\mu\text{m}$  bis  $14,4\mu\text{m}$  für die Balkensteifigkeiten  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$  in Abbildung 5.8a. Die Zunahme der Abweichungen  $\delta\Delta z_a$  mit steigender Balkensteifigkeit  $K$  entsteht u. a. aufgrund der endlichen Steifigkeit der Einspannvorrichtung, die bei der Ermittlung der numerischen Arbeitspunkte mit dem Arbeitsdiagramm als theoretisch starr angenommen wird. Je dünner der eingebaute Balken ist, umso größer wird die gemessene Auslenkung des Balkens im Vergleich zur Verformung der Klemmbacke von der Einspannvorrichtung, Bauteil Nr. 17 in Abbildung 5.3. Diese Zunahme der Abweichungen  $\delta F_a$  und  $\delta\Delta z_a$  entsteht u. a. aufgrund der endlichen Steifigkeit der Einspannvorrichtung, die sich im Versuchsstand unter der Einwirkung des sich ausdehnenden Stapelaktuators ebenfalls verformt [45]. Ein Teil der generierten Stellwege des Stapelaktuators wird aufgrund der unberücksichtigten Verformung der Einspannvorrichtung vernachlässigt. Eine Messung der gesamten Dehnung eines Stapelaktuators mit einem DMS im Versuchsstand würde diesen Fehler beheben. Eine Erhöhung der Steifigkeit der Einspannvorrichtung z. B. durch die Erhöhung der Masse der Klemmbacke gepaart mit zusätzlichen Befestigungsschrauben kann auch zur Reduzierung der Abweichungen  $\delta F_a$  und  $\delta\Delta z_a$  für die Balkensteifigkeiten  $K_2 < K_3$  beitragen.

Die Abweichungen  $\delta F_a$  und  $\delta\Delta z_a$  in den Abbildungen 5.7 und 5.8 werden mit zunehmender Vorspannkraft  $F_v$  kleiner, z. B. mit  $0,07\text{N}$ ,  $0,4\text{N}$  und  $2,8\text{N}$ ,  $0,08\mu\text{m}$ ,  $0,82\mu\text{m}$  und  $1,3\mu\text{m}$  für die Balkensteifigkeiten  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$ ,  $\hat{U}_5 = 195\text{V}$  und  $f_1 = 1\text{Hz}$ . Hier zeigt sich der positive Einfluss einer Vorspannkraft  $F_v$  auf die Stellwege piezoelektrischer Stapelaktuatoren [59, 92].

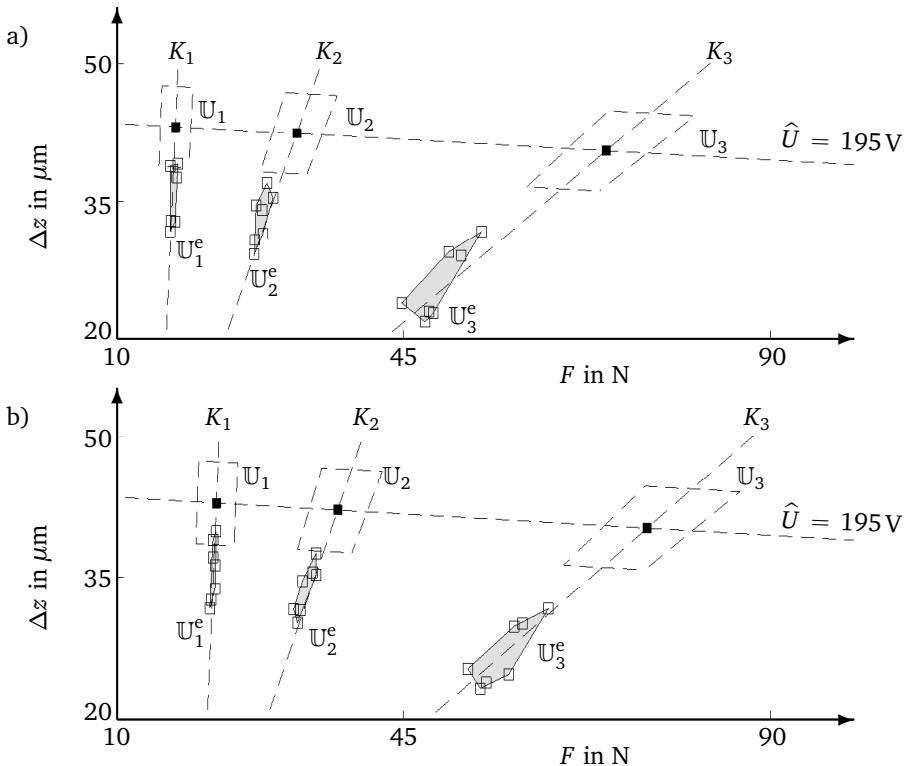
Das deterministische Arbeitsdiagramm in Abbildung 4.1 überschätzt die gemessenen Stellkräfte und -wege des Stapelaktuators vom Typ 3 9999-62 im aktiven System. Faktoren wie das nichtlineare Verhalten des PZT-Werkstoffs, der Einfluss der Vorspannkraft auf die Kraft-Weg-Kennlinie des Stapelaktuators und die Vernachlässigung der endlichen Steifigkeit der Einspannvorrichtung verursachen Abweichungen zwischen den Stellkräften und -wegen der experimentellen und nominalen Arbeitspunkte. Die Fähigkeit des Stapelaktuators, die notwendige Stellkraft zur Stabilisierung des knickgefährdeten Balkens im aktiven Balkensystem in Abschnitt 2.2 zu erzeugen, wird ungewiss. Die überschätzten Stellkräfte und -wege können eine Fehldimensionierung eines auszuwählenden Stapelaktuators verursachen.

Im folgenden Abschnitt werden die experimentellen Unsicherheitsregionen untersucht, die sich aus den experimentellen Arbeitspunkten ergeben.

### 5.3.2 Experimentelle Unsicherheitsregionen

Zum Aufbau einer Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}^e$  werden die einzelnen Arbeitspunkte der Stapelaktuatoren mit Linien verbunden, so dass sie innerhalb eines geschlossenen und konvexen Bereichs liegen. Mit der MATLAB<sup>®</sup>-Funktion *convhulln.m* werden die Eckpunkte einer experimentellen Unsicherheitsregion  $\mathbb{U}^e$  aus den Koordinaten  $(F_a^e; \Delta z_a^e)$  der einzelnen Arbeitspunkte ermittelt [55, 9].

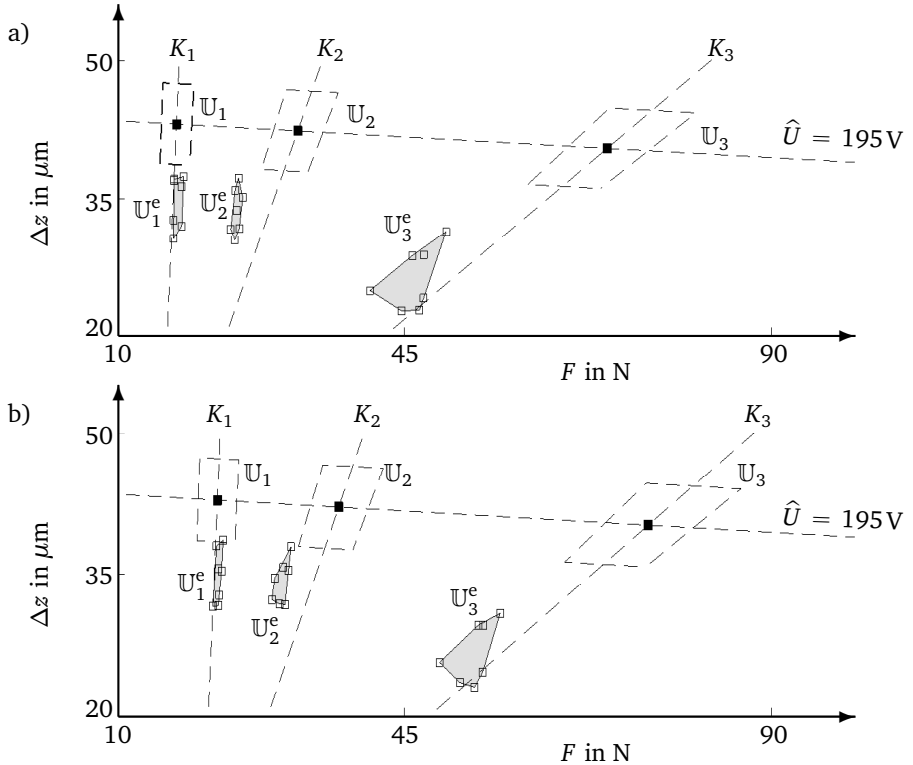
Abbildung 5.9 zeigt die experimentellen Unsicherheitsregionen für die Spannungsamplitude  $\hat{U}_5 = 195 \text{ V}$ , die Vorspannkräfte  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$  und  $F_{v,2} = 20 \text{ N}$  und die Frequenz  $f_1 = 1 \text{ Hz}$ .



**Abbildung 5.9:** Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_1^e$ ,  $\mathbb{U}_2^e$  und  $\mathbb{U}_3^e$  aus den experimentellen Arbeitspunkten (□) für die Spannungsamplitude  $\hat{U}_5 = 195 \text{ V}$  und die Frequenz  $f_1 = 1 \text{ Hz}$ , a) für die Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$  und b) für  $F_{v,2} = 20 \text{ N}$



Abbildung 5.10 zeigt die experimentellen Arbeitspunkte der Stapelaktuatoren mit ihren jeweiligen Unsicherheitsregionen für die Spannungsamplitude  $\hat{U}_5 = 195 \text{ V}$ , die Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$  und  $F_{v,2} = 20 \text{ N}$  und die Frequenz  $f_2 = 27 \text{ Hz}$ .



**Abbildung 5.10:** Unsicherheitsregionen  $U_1^e$ ,  $U_2^e$  und  $U_3^e$  aus den experimentellen Arbeitspunkten ( $\square$ ) für die Spannungsamplitude  $\hat{U}_5 = 195 \text{ V}$  und die Frequenz  $f_2 = 27 \text{ Hz}$ , a) für die Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$  und b) für  $F_{v,2} = 20 \text{ N}$

Die baugleichen Stapelaktuatoren zeigen, u. a. aufgrund ihrer unterschiedlichen Blockierkräfte  $F_B^e$  und maximal freien Stellwege  $\Delta z_{\max}^e$  in Tabelle 5.6, unterschiedliche Arbeitspunkte ( $\square$ ). Die Mehrheit der experimentellen Arbeitspunkte liegt unterhalb der numerischen Unsicherheitsregionen  $U_1$ ,  $U_2$  und  $U_3$  aus den Worst-Case Analysen, mit gestrichelten Linien in den Abbildungen 5.9 und 5.10. Diese Diskrepanzen entstehen aufgrund der Abweichungen  $\delta F_a$  und  $\delta \Delta z_a$  zwischen

den Stellkräften und -wegen der experimentellen und nominalen Arbeitspunkte, die bereits in Tabelle A.5 des Abschnitts 5.3.1 angegeben werden. Die Ursachen für diese Abweichungen wie das nichtlineare Verhalten des PZT-Werkstoffs, der Einfluss der Vorspannkraft auf die Kraft-Weg-Kennlinie des Stapelaktuators und die endliche Steifigkeit der Einspannvorrichtung wurden ebenfalls im Abschnitt 5.3.1 ausführlich diskutiert.

Die experimentellen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_2^e$  und  $\mathbb{U}_3^e$  für die Balkensteifigkeiten  $K_2 < K_3$  bei der Frequenz  $f_2 = 27 \text{ Hz}$  in Abbildung 5.10 liegen nicht auf die nominalen Kraft-Weg-Kennlinien beider Balken, vgl. mit Abbildung 5.9. Der Abstand zwischen den gemessenen Arbeitspunkten und den nominalen Kraft-Weg-Kennlinien der Balkensteifigkeiten  $K_2 < K_3$  ist für alle Spannungsamplituden  $\hat{U}$  in den Abbildungen 5.6c und 5.6d auch zu sehen.

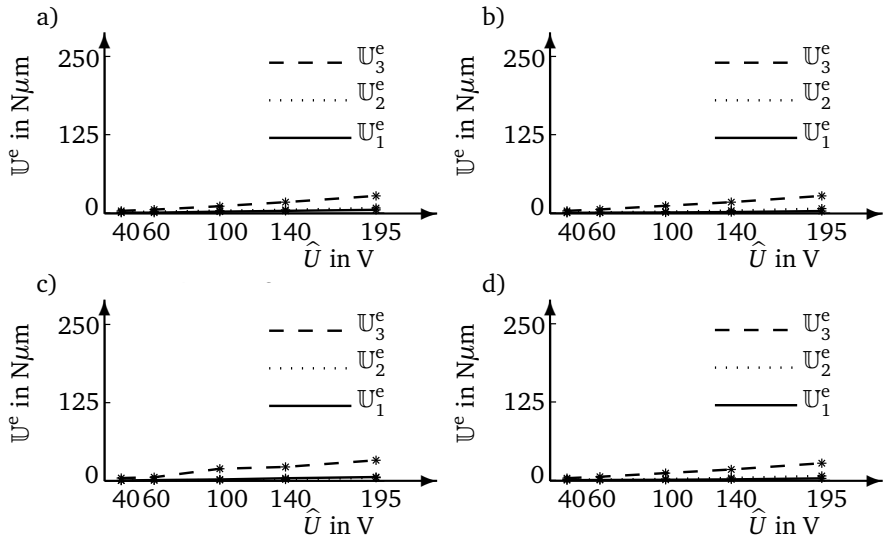
Dieser Abstand wird nicht durch die gemessene Vorspannkraft  $F_{v,2}^e = 21,1 \text{ N}$  in Tabelle 5.5, die 5 % größer als ihrer Nominalwert  $F_{v,2} = 20 \text{ N}$  ist, verursacht. Höhere Vorspannkräfte bewirken aufgrund der auftretenden Verschiebung der Kraft-Weg-Kennlinien der Balken im Arbeitsdiagramm größere Stellkräfte, siehe Gleichungssystem (2.2). Dies ist in Abbildung 5.10 aber nicht der Fall. Der Abstand zwischen beiden Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_2^e$  und  $\mathbb{U}_3^e$  und den nominalen Kraft-Weg-Kennlinien entsteht z. T. aufgrund der dynamischen Steifigkeit beider Balken. Die dynamische Steifigkeit stellt das Inverse der dynamischen Nachgiebigkeit eines schwingenden Balkens dar. Sie berücksichtigt u. a. die Trägheit des Balkens und sie hängt von zusätzlichen Eigenschaften wie die Dichte des Balkenwerkstoffs und die Dämpfung des Balkens ab [48]. Die Betrachtung der dynamischen Steifigkeit eines Balkens anstelle seiner statischen Steifigkeit in Gleichung (2.10) würde nominale Kraft-Weg-Kennlinien, die näher an die gemessenen Arbeitspunkte liegen, ergeben. Dies führt auch zu einer frequenzabhängigen Kraft-Weg-Kennlinie eines Balkens, dessen dynamische Steifigkeit aus der Modellierung seiner Kontinuumschwingungen abgeleitet wird [48].

Tabelle 5.9 zeigt die Werte der experimentellen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}^e$  in den Abbildungen 5.9 und 5.10. Abbildung 5.11 zeigt die Verläufe der Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_1^e$ ,  $\mathbb{U}_2^e$  und  $\mathbb{U}_3^e$  über die Spannungsamplitude  $\hat{U}$ .

Die experimentellen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}^e$  sind bis zu 73 % kleiner als die numerischen Werte  $\mathbb{U}$  aus den Worst-Case Analysen, siehe Tabelle 5.9 und Abbildung 5.11. Diese Verhältnisse zwischen den numerischen und den experimentellen Unsicherheitsregionen sind plausibel, weil die Streuungen in den gemessenen Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 5.5 kleiner als ihre angenommenen Werte in Tabelle 4.2 der Worst-Case Analysen sind. Außerdem ist es wahrscheinlich, dass die experimentellen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}^e$  mit einer größeren Anzahl an untersuchten Stapelaktuatoren ebenfalls größer werden.

**Tabelle 5.9:** Experimentelle und numerische Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}^e$  und  $\mathbb{U}$  für die Spannungsamplitude  $\hat{U}_5 = 195 \text{ V}$ , die Vorspannkräfte  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$  und  $F_{v,2} = 20 \text{ N}$  und die Frequenzen  $f_1 = 1 \text{ Hz}$  und  $f_2 = 27 \text{ Hz}$

|       |           | $\mathbb{U}_1^e$<br>[N $\mu\text{m}$ ] | $\mathbb{U}_2^e$<br>[N $\mu\text{m}$ ] | $\mathbb{U}_3^e$<br>[N $\mu\text{m}$ ] | $\mathbb{U}_1$<br>[N $\mu\text{m}$ ] | $\mathbb{U}_2$<br>[N $\mu\text{m}$ ] | $\mathbb{U}_3$<br>[N $\mu\text{m}$ ] |
|-------|-----------|--|--|--|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| $f_1$ | $F_{v,1}$ | 5,1                                    | 7,9                                    | 27,3                                   | 32,6                                 | 53,2                                 | 85,4                                 |
|       | $F_{v,2}$ | 2,9                                    | 6,8                                    | 27,2                                   | 41,4                                 | 61,9                                 | 94,2                                 |
| $f_2$ | $F_{v,1}$ | 6,3                                    | 5,3                                    | 32,9                                   | 32,6                                 | 53,2                                 | 85,4                                 |
|       | $F_{v,2}$ | 4,9                                    | 6,9                                    | 25,4                                   | 41,4                                 | 61,9                                 | 94,2                                 |



**Abbildung 5.11:** Verläufe der experimentellen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_1^e$ ,  $\mathbb{U}_2^e$  und  $\mathbb{U}_3^e$  über die Spannungsamplitude  $\hat{U}$  in  
a) für die Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$  und die Frequenz  $f_1 = 1 \text{ Hz}$   
b) für die Vorspannkraft  $F_{v,2} = 20 \text{ N}$  und die Frequenz  $f_1 = 1 \text{ Hz}$   
c) für die Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$  und die Frequenz  $f_2 = 27 \text{ Hz}$   
d) für die Vorspannkraft  $F_{v,2} = 20 \text{ N}$  und die Frequenz  $f_2 = 27 \text{ Hz}$   
vgl. mit Abbildung 4.6a

Die Verläufe der experimentellen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}_1^e$ ,  $\mathbb{U}_2^e$  und  $\mathbb{U}_3^e$  über die Spannungsamplitude  $\hat{U}$  in Abbildung 5.11 sind nichtlinear und steigend.

Dieser Trend bestätigt die nichtlineare Abhängigkeit zwischen den numerischen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}$  und der Betriebsspannung aus den Worst-Case Analysen in Abbildung 4.5. Es sind keine nennenswerte Unterschiede zwischen den Verläufen der experimentellen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}^e$  für die beiden Frequenzen  $f_1$  und  $f_2$  vorhanden.

Die Worst-Case Analysen zeigen in Abbildung 4.6b, dass die numerischen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}$  mit zunehmender Vorspannkraft  $F_v$  linear steigen. Dieser Trend wird nicht durch die experimentellen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}^e$  bestätigt. Tabelle 5.9 zeigt, dass die experimentellen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}^e$  bei gleicher Balkensteifigkeit  $K$  und zunehmender Vorspannkraft  $F_v^e$  kleiner werden. Ein Grund für diesen Sachverhalt liegt im Einfluss der mechanischen Vorspannkraft  $F_v$  auf dem PZT-Werkstoff von Stapelaktuatoren [92]. Im Arbeitsdiagramm in Abbildung 2.2 wird eine lineare Kraft-Weg-Kennlinie des Stapelaktuator ohne Berücksichtigung der Vorspannkraft  $F_v$  modelliert, siehe Gleichung (2.1). [60] hat z. B. gezeigt, dass eine geeignete Vorspannkraft zu höheren messbaren Stellkräften und -wegen bei piezoelektrischen Stapelaktuatoren führen kann. Es ist jedoch zu beachten, dass eine zu hohe mechanische Vorspannung zum Verlust der piezoelektrischen Eigenschaften bei PZT-Keramiken führt.

### 5.3.3 Validierung der Ergebnisse aus den Monte Carlo-Simulationen

Die MCS im Abschnitt 4.4 haben gezeigt, dass die Streuungen in den numerischen Stellkräften  $F_a$  mit zunehmender Balkensteifigkeit  $K$  größer werden, während die Streuungen in den numerischen Stellwegen  $\Delta z_a$  mit zunehmender Balkensteifigkeit  $K$  nahezu konstant bleiben, siehe die Abbildungen 4.11 und 4.12. Die Streuungen der gemessenen Stellkräfte  $\hat{F}_a^e - \check{F}_a^e$  in den Tabellen 5.2 und 5.3 werden mit zunehmender Balkensteifigkeit  $K$  für die elektrische Spannungsamplitude  $\hat{U}_5 = 195\text{V}$  und die mechanische Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15\text{N}$  auch größer. Sie betragen 1,07N, 2,42N und 10,2N für die Balkensteifigkeiten  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$  bei der Frequenz  $f_1 = 1\text{Hz}$ . Bei der Frequenz  $f_2 = 27\text{Hz}$  betragen sie 1,28N, 1,57N und 9,68N für die Balkensteifigkeiten  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$ . Die Streuungen der gemessenen Stellwege  $\Delta \hat{z}_a^e - \Delta \check{z}_a^e$  betragen  $7,7\mu\text{m}$ ,  $7,8\mu\text{m}$  und  $10,1\mu\text{m}$  für die Balkensteifigkeiten  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$  bei der Frequenz  $f_1 = 1\text{Hz}$ . Der Wert  $10,1\mu\text{m}$  für die Balkensteifigkeit  $K_3$  entsteht u. a. aufgrund der hohen Vorspannkraft  $F_{v,1}^e = 17,6\text{N}$  in Tabelle 5.2.

Die Anzahl der untersuchten Stapelaktuatoren (7) ermöglicht keine Überprüfung der Verteilungen der Arbeitspunkte innerhalb des Arbeitsdiagramms in Abbildung 4.13 Abschnitt 4.4. Eine Überschreitung des gemessenen Mittelwerts des maximalen freien Stellwegs  $\Delta \check{z}_{max}^e = 44,8\mu\text{m}$  in Tabelle 5.5 ist bei den untersuchten

---

Stapelaktuatoren und Balken nicht gegeben, da die gemessenen Stellkräfte und -wege  $F_a^e$  und  $\Delta z_a^e$  der experimentellen Arbeitspunkte kleiner als ihre Nominalwerte sind, z. B. bis zu 33,7 % und 35 % für die Balkensteifigkeit  $K_3$  in Abbildung 5.9.

Im nächsten Abschnitt dieses Kapitels werden die vorgestellten experimentellen Ergebnisse zusammengefasst und diskutiert.

---

## 5.4 Fazit

---

Die experimentellen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}^e$  in Tabelle 5.9 sind bis zu 73 % kleiner als ihre jeweiligen numerischen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}$  der Worst-Case Analysen, vgl. die Abbildungen 4.6a und 5.11. Dieser Sachverhalt wird durch die begrenzte Anzahl an untersuchten Stapelaktuatoren und die geringeren Streuungen in den gemessenen Aktuator- und Balkeneigenschaften in Tabelle 5.5 verursacht, vgl. mit den Werten in Tabelle 4.2. Die numerischen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}$  aus den Worst-Case Analysen sind konservativ, vgl. die Abbildungen 4.6a und 5.11.

Die experimentellen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}^e$  werden mit zunehmender Balkensteifigkeit  $K$  größer, z. B.  $\mathbb{U}_1^e = 5,1 \text{ N}\mu\text{m}$ ,  $\mathbb{U}_2^e = 7,9 \text{ N}\mu\text{m}$  und  $\mathbb{U}_3^e = 27,3 \text{ N}\mu\text{m}$  für die mechanische Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$ . Dieser Trend wird bereits in Tabelle 5.9 der Worst-Case Analysen zwischen den numerischen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}$  und den Balkensteifigkeiten  $K$  ermittelt.

Die Verläufe der experimentellen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}^e$  in Abhängigkeit der elektrischen Spannungsamplitude  $\hat{U}$  sind nichtlinear und steigend, siehe Abbildung 5.11. Dieser Trend entspricht auch der nichtlinearen Abhängigkeit zwischen den numerischen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}$  und der elektrischen Betriebsspannung  $U$  in Abbildung 4.6a der Worst-Case Analysen.

Die experimentellen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}^e$  werden mit zunehmender Vorspannkraft  $F_v$  kleiner, während in Abbildung 4.6b der Worst-Case Analysen die numerischen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}$  mit zunehmender Vorspannkraft  $F_v$  größer werden. Ein Grund dafür liegt in der Nicht-Berücksichtigung der Vorspannkraft  $F_v$  in der Kraft-Weg-Kennlinie des Stapelaktuators im deterministischen Arbeitsdiagramm, siehe Gleichung (2.1).

Die Lage der experimentellen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}^e$  im Arbeitsdiagramm ist für die beiden Ansteuerungsfrequenzen  $f_1 = 1 \text{ Hz}$  und  $f_2 = 27 \text{ Hz}$  der untersuchten Stapelaktuatoren unterschiedlich, siehe die Abbildungen 5.9 und 5.10. Diese Tatsache resultiert aus dem dynamischen Verhalten der untersuchten Balken, die bei den Frequenzen  $f_1 = 1 \text{ Hz}$  und  $f_2 = 27 \text{ Hz}$  unterschiedliche experimentelle Balkensteifigkeiten  $K^e$  besitzen, siehe Tabelle 5.4.

---

Die Streuungen in den gemessenen Stellkräften werden mit zunehmender Balkensteifigkeit  $K$  größer, während die Streuungen in den gemessenen Stellwegen nahezu konstant bleiben, siehe die Tabellen 5.2 und 5.3. Beide Trends werden bereits in den Abbildungen 4.11 bis 4.12 der MCS im Abschnitt 4.4 abgebildet. Die Unterschiede zwischen den gemessenen Stellkräften und -wegen und ihren Streuungen in den Tabellen 5.2 und 5.3 sind für die Frequenzen  $f_1 = 1 \text{ Hz}$  und  $f_2 = 27 \text{ Hz}$  relativ klein.

Die Verteilungsfunktionen der gemessenen Aktuator- und Balkeneigenschaften und der gemessenen Stellkräfte und -wege sind aus den Stichproben (7 Stapelaktuatoren und 3 Balken) nicht zu ermitteln. Aus diesem Grund gehören die tatsächlichen Streuungen in den Aktuator- und Balkeneigenschaften im Versuchsstand und ihre Wirkung auf die gemessenen Stellkräfte und -wege zur Unsicherheitskategorie Ungewissheit.

Die experimentellen Arbeitspunkte zeigen, dass das deterministische Arbeitsdiagramm im Gleichungssystem (2.11) die tatsächlichen Stellkräfte und -wege der Stapelaktuatoren im experimentellen aktiven System überschätzt, z. B. mit 33 % und 35 % geringeren gemessenen Stellkräften und -wegen für die Balkensteifigkeit  $K_3$  im kritischen Arbeitspunkt in Abbildung 2.8b mit der Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$ , der Spannungsamplitude  $\hat{U}_5 = 195 \text{ V}$  und der Frequenz  $f_1 = 1 \text{ Hz}$ . Die Abweichungen  $\delta F_a$  und  $\delta \Delta z_a$  zwischen den gemessenen und den numerischen Stellkräften und -wegen der Arbeitspunkte in Abbildung 5.6 zeigen eine **Modellunsicherheit** in der Anwendung des Arbeitsdiagramms, die unabhängig von den Streuungen in den Aktuator- und Balkeneigenschaften im deterministischen Arbeitsdiagramm ist. Ein Grund für das Auftreten dieser Abweichungen ist eine Verformung der Einspannvorrichtung unter dem Einfluss des sich ausdehnenden Stapelaktuators im Versuchsstand. Im deterministischen Arbeitsdiagramm wird die Einspannvorrichtung als starr angenommen und im Versuchsstand wird nur die Auslenkung des Balkens bzw. den Stellweg des Stapelaktuators in Balkenrichtung gemessen. Ein Teil des gesamten Stellwegs des Stapelaktuators wird vernachlässigt. Weitere Einflussfaktoren wie mechanische Verluste, Nichtlinearitäten und Inhomogenitäten im PZT-Werkstoff der Stapelaktuatoren, der Einfluss der Vorspannkraft auf die Kraft-Weg-Kennlinie des Stapelaktuators und die dynamische Steifigkeit des Balkens tragen ebenfalls zur Entstehung der Abweichungen  $\delta F_a$  und  $\delta \Delta z_a$  bei.

Eine gute Übereinstimmung zwischen den numerischen und gemessenen Stellkräften und -wegen eines Stapelaktuators ist für das aktive Balkensystem in Abschnitt 2.2 wichtig, um ein Knicken des zu stabilisierenden Balkens zu vermeiden. Im nächsten Kapitel dieser Arbeit wird das deterministische Arbeitsdiagramm in Abbildung 4.1 an die experimentellen Arbeitspunkte in Abbildung 5.5 angepasst.

---

## 6 Modellanpassung des deterministischen Arbeitsdiagramms

In diesem Kapitel wird das deterministische Arbeitsdiagramm im Gleichungssystem (2.11) zur Ermittlung der nominalen Arbeitspunkte des Stapelaktuators im aktiven System in Abbildung 5.1 an die gemessenen Arbeitspunkte in Kapitel 5 angepasst. Die Grundidee der hier durchgeführten Modellanpassung ist es, die Stellkräfte und -wege der nominalen Arbeitspunkte mit den Abweichungen in den Abbildungen 5.7 und 5.8 so zu kombinieren, dass die daraus resultierenden Stellkräfte und -wege mit den experimentellen Arbeitspunkten übereinstimmen.

Die angepassten Stellkräfte und -wege  $\tilde{F}_a$  und  $\Delta\tilde{z}_a$  eines Stapelaktuators werden folgendermaßen ermittelt

$$\begin{cases} \tilde{F}_a &= F_a - G_F(f, \hat{U}, K, F_v) \\ \Delta\tilde{z}_a &= \Delta z_a - G_{\Delta z}(f, \hat{U}, K, F_v) \end{cases}, \quad (6.1)$$

mit  $\tilde{F}_a$  und  $\Delta\tilde{z}_a$  den numerisch angepassten Stellkräften und -wegen,  $F_a$  und  $\Delta z_a$  den numerischen Stellkräften und -wegen aus dem Gleichungssystem (2.11),  $G_F(f, \hat{U}, K, F_v)$  und  $G_{\Delta z}(f, \hat{U}, K, F_v)$  den Funktionen zur Beschreibung der Abhängigkeiten zwischen den Ansteuerungsfrequenz  $f$ , der Spannungsamplitude  $\hat{U}$ , der Balkensteifigkeit  $K$ , der mechanischen Vorspannkraft  $F_v$  und den Abweichungen  $\delta F_a$  und  $\delta \Delta z_a$ .

---

### 6.1 Ermittlung der Regressionsfunktionen

---

Die unbekannten Funktionen  $G_F(f, \hat{U}, K, F_v)$  und  $G_{\Delta z}(f, \hat{U}, K, F_v)$  im Gleichungssystem (6.1) werden mit den Funktionen  $g_F(\hat{U}, K)$  und  $g_{\Delta z}(\hat{U}, K)$  approximiert, die mit **mehrdimensionalen Regressionen** [10] über die ermittelten Abweichungen

$\delta F_a$  und  $\delta \Delta z_a$  in den Abbildungen 5.7 und 5.8 bestimmt werden. Hierfür werden die von den Variablen  $\hat{U}$  und  $K$  abhängigen quadratischen Polynome

$$\begin{cases} g_F(\hat{U}, K) & \approx \eta_0 + \eta_1 \hat{U} + \eta_2 \hat{U}^2 + \eta_3 K + \eta_4 K^2 + \eta_5 \hat{U}K \\ g_{\Delta z}(\hat{U}, K) & \approx \beta_0 + \beta_1 \hat{U} + \beta_2 \hat{U}^2 + \beta_3 K + \beta_4 K^2 + \beta_5 \hat{U}K \end{cases} \quad (6.2)$$

für eine konstante Frequenz  $f$  und eine konstante Vorspannkraft  $F_v$  als Regressionsfunktionen mit den unbekannten Regressionskoeffizienten  $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_5$  und  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_5$  angenommen. Die Abweichungen zwischen den Stellkräften  $\delta F_a$  und -wegen  $\delta \Delta z_a$  der numerischen und experimentellen Arbeitspunkte in den Abbildungen 5.7 und 5.8 bilden die Startwerte für die Ermittlung der Regressionsfunktionen  $g_F(\hat{U}, K)$  und  $g_{\Delta z}(\hat{U}, K)$ .

Die Ordnung der Polynome richtet sich u. a. nach der Anzahl  $n=3$  der betrachteten Balkensteifigkeiten  $K_1, K_2$  und  $K_3$  und  $m=5$  der Spannungsamplituden  $\hat{U}_1, \hat{U}_2, \dots, \hat{U}_5$ . Die Verwendung eines Polynoms dritter oder vierter Ordnung für die Balkensteifigkeit  $K$  in der Gleichung (6.2) würde z. B. zu einer nicht eindeutigen bzw. nicht kontinuierlichen Regressionsfunktion führen, weil die Anzahl der numerischen Integrationspunkte  $n=3$  kleiner als die Anzahl der gesuchten Regressionskoeffizienten (4 für ein Polynom dritter Ordnung) wäre. Die Genauigkeit eines Regressionsmodells steigt mit der Ordnung der betrachteten Regressionsfunktionen auf [63]. Die Näherungswerte  $g_F(\hat{U}_m, K_n)$  und  $g_{\Delta z}(\hat{U}_m, K_n)$  der Abweichungen  $\delta F_a$ ,  $\delta \Delta z_a$  aus den Gleichungssystemen (5.4) und (6.2) mit  $m=1, 2, \dots, 5$  und  $n=1, 2, 3$  werden mit der Indizierung  $g_{F,i}$  und  $g_{\Delta z,i}$  vereinfacht,  $i=1, 2, 3, \dots, M$  und  $M=15$ .

### 6.1.1 Koeffizienten der Regressionsfunktionen

Die Regressionskoeffizienten  $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_5$  und  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_5$  werden nach der Fehlerquadratmethode bestimmt

$$\sum_{i=1}^M (\delta F_{a,i} - g_{F,i})^2 = \min! \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^M (\delta \Delta z_{a,i} - g_{\Delta z,i})^2 = \min!, \quad (6.3)$$

bei der die Summen der Quadrate der Residuen der ermittelten Abweichungen  $\delta F_{a,i}$  und  $\delta \Delta z_{a,i}$  mit ihren Näherungswerten  $g_{F,i}$  und  $g_{\Delta z,i}$  aus den Gleichungen (6.2) minimiert werden [10, 57]. Die Bedingungen in Gleichung (6.3) führen zu den folgenden Normalgleichungssystemen [10] für die gesuchten Koeffizienten der Regressionsfunktionen  $g_F(\hat{U}, K)$  und  $g_{\Delta z}(\hat{U}, K)$

$$\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\Theta})^{-1} (\boldsymbol{\Theta}^T \delta \mathbf{F}_a) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\Theta})^{-1} (\boldsymbol{\Theta}^T \delta \Delta \mathbf{z}_a), \quad (6.4)$$



mit den beiden Vektoren

$$\boldsymbol{\eta} = \{\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_5\}^T, \quad \boldsymbol{\beta} = \{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_5\}^T,$$

der Matrix  $\boldsymbol{\Theta}$  und ihrer transponierten Matrix  $\boldsymbol{\Theta}^T$

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{U}_1 & \hat{U}_1^2 & K_1 & K_1^2 & \hat{U}_1 K_1 \\ 1 & \hat{U}_2 & \hat{U}_2^2 & K_1 & K_1^2 & \hat{U}_2 K_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \hat{U}_5 & \hat{U}_5^2 & K_1 & K_1^2 & \hat{U}_5 K_1 \\ 1 & \hat{U}_1 & \hat{U}_1^2 & K_2 & K_2^2 & \hat{U}_1 K_2 \\ 1 & \hat{U}_2 & \hat{U}_2^2 & K_2 & K_2^2 & \hat{U}_2 K_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \hat{U}_5 & \hat{U}_5^2 & K_2 & K_2^2 & \hat{U}_5 K_2 \\ 1 & \hat{U}_1 & \hat{U}_1^2 & K_3 & K_3^2 & \hat{U}_1 K_3 \\ 1 & \hat{U}_2 & \hat{U}_2^2 & K_3 & K_3^2 & \hat{U}_2 K_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \hat{U}_5 & \hat{U}_5^2 & K_3 & K_3^2 & \hat{U}_5 K_3 \end{bmatrix}.$$

---

### 6.1.2 Güte einer Regressionsfunktion

---

Die Güte einer Regressionsfunktion kann mit dem Bestimmtheitsmaß  $R^2$  beurteilt werden. Der Bestimmtheitsmaß beschreibt den Anteil der Variabilität in den Abweichungen  $\delta F_{a,i}$  bzw.  $\delta \Delta z_{a,i}$ , der von den Regressionsfunktionen  $g_F(\hat{U}, K)$  bzw.  $g_{\Delta z}(\hat{U}, K)$  beschrieben wird, mit  $0 \leq R^2 \leq 1$ . Die Werte von  $R^2$  in der Nähe von 1 zeigen eine hohe Modellgüte und die Werte von  $R^2$  in der Nähe von 0 zeigen eine geringere Modellgüte. Die Bestimmtheitsmaße der Regressionsfunktionen  $g_F(\hat{U}, K)$  und  $g_{\Delta z}(\hat{U}, K)$  in Gleichung (6.2) lauten [63],

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^M (\delta F_{a,i} - g_{F,i})^2}{\sum_{i=1}^M (\delta F_{a,i} - \bar{g}_F)^2} \quad \text{und} \quad R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^M (\delta \Delta z_{a,i} - g_{\Delta z,i})^2}{\sum_{i=1}^M (\delta \Delta z_{a,i} - \bar{g}_{\Delta z})^2} \quad (6.5)$$

mit  $i = 1, 2, 3, \dots, M$ ,  $M = 15$ ,  $\delta F_{a,i}$  und  $\delta \Delta z_{a,i}$  den Abweichungen in Tabelle A.5,  $g_{F,i}$  und  $g_{\Delta z,i}$  den approximierten Abweichungen aus dem Gleichungssystem (6.2) mit ihren jeweiligen Mittelwerten

$$\overline{g_F} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g_{F,i}, \quad \text{und} \quad \overline{g_{\Delta z}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g_{\Delta z,i}. \quad (6.6)$$

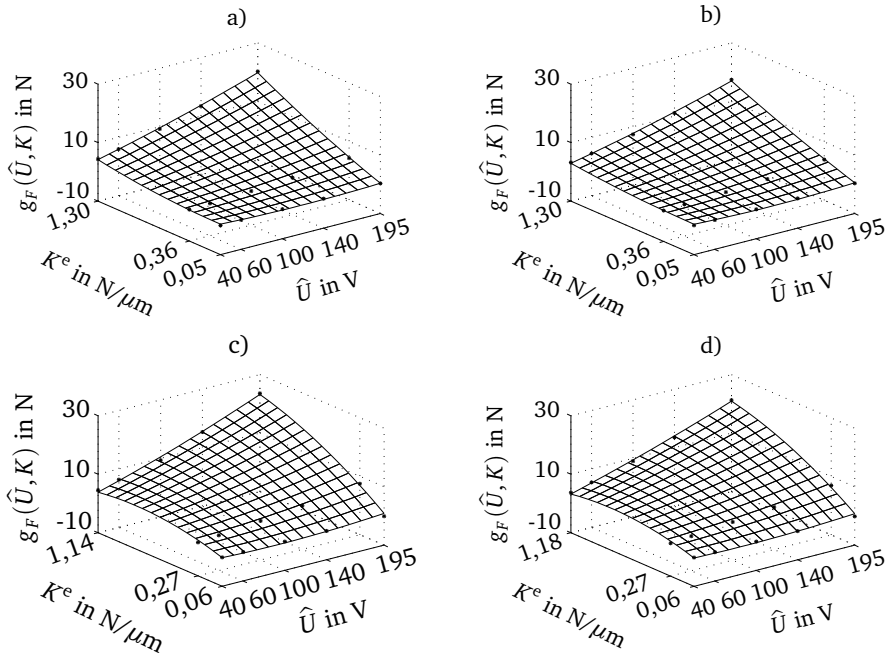
Tabelle 6.1 zeigt die Koeffizienten der Regressionsfunktionen  $g_F(\hat{U}, K)$  und  $g_{\Delta z}(\hat{U}, K)$  und ihre Bestimmtheitsmaße  $R^2$ , die mit den Gleichungen (6.4) und (6.5) für die nominalen und experimentellen Arbeitspunkte in Abbildung 5.6 ermittelt worden sind.

**Tabelle 6.1:** Regressionskoeffizienten und Bestimmtheitsmaße der Regressionsfunktionen  $g_F(\hat{U}, K)$  und  $g_{\Delta z}(\hat{U}, K)$

| $f_1 = 1 \text{ Hz}$  |                          |                          |           |                            |                            |
|-----------------------|--------------------------|--------------------------|-----------|----------------------------|----------------------------|
|                       | $F_{v,1} = 15 \text{ N}$ | $F_{v,2} = 20 \text{ N}$ |           | $F_{v,1} = 15 \text{ N}$   | $F_{v,2} = 20 \text{ N}$   |
| $\eta$                | $g_F(\hat{U}, K)$        | $g_F(\hat{U}, K)$        | $\beta$   | $g_{\Delta z}(\hat{U}, K)$ | $g_{\Delta z}(\hat{U}, K)$ |
| $\eta_0$              | 1,456                    | 1,429                    | $\beta_0$ | 1,328                      | 1,436                      |
| $\eta_1$              | $-2,92 \cdot 10^{-2}$    | $2,98 \cdot 10^{-2}$     | $\beta_1$ | $-4,70 \cdot 10^{-3}$      | $-6,47 \cdot 10^{-3}$      |
| $\eta_2$              | -3,61                    | -2,82                    | $\beta_2$ | 0,827                      | -0,024                     |
| $\eta_3$              | $1,05 \cdot 10^{-4}$     | $1,16 \cdot 10^{-4}$     | $\beta_3$ | $1,64 \cdot 10^{-4}$       | $1,67 \cdot 10^{-4}$       |
| $\eta_4$              | 2,475                    | 1,373                    | $\beta_4$ | -0,42                      | 0,0132                     |
| $\eta_5$              | 0,081                    | 0,0703                   | $\beta_5$ | 0,029                      | 0,0259                     |
| $R^2$                 | 0,997                    | 0,997                    | $R^2$     | 0,998                      | 0,998                      |
| $f_2 = 27 \text{ Hz}$ |                          |                          |           |                            |                            |
| $\eta_0$              | 0,091                    | -0,296                   | $\beta_0$ | 2,504                      | 2,063                      |
| $\eta_1$              | $-3,40 \cdot 10^{-2}$    | $-2,48 \cdot 10^{-2}$    | $\beta_1$ | $-6,27 \cdot 10^{-3}$      | $-1,82 \cdot 10^{-3}$      |
| $\eta_2$              | 10,08                    | 9,73                     | $\beta_2$ | -3,13                      | -3,16                      |
| $\eta_3$              | $1,46 \cdot 10^{-4}$     | $1,12 \cdot 10^{-4}$     | $\beta_3$ | $1,74 \cdot 10^{-4}$       | $1,48 \cdot 10^{-4}$       |
| $\eta_4$              | -8,91                    | -8,32                    | $\beta_4$ | 2,11                       | 2,27                       |
| $\eta_5$              | 0,109                    | 0,095                    | $\beta_5$ | 0,032                      | 0,029                      |
| $R^2$                 | 0,992                    | 0,994                    | $R^2$     | 0,996                      | 0,994                      |

Alle Bestimmtheitsmaße  $R^2$  in Tabelle 6.1 zeigen Werte, die größer als 0,99 sind. Dadurch ist die Güte der ermittelten Regressionsfunktionen  $g_F(\hat{U}, K)$  und  $g_{\Delta z}(\hat{U}, K)$  für die verfügbaren Messergebnisse hoch.

Abbildung 6.1 zeigt die Regressionsfunktionen  $g_F(\hat{U}, K)$  der Abweichungen  $\delta F_{a,i}$  zwischen den gemessenen und nominalen Stellkräften für die Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$  und  $F_{v,2} = 20 \text{ N}$  und die Frequenzen  $f_1 = 1 \text{ Hz}$  und  $f_2 = 27 \text{ Hz}$  mit den bekannten Koeffizienten  $\eta$  und  $\beta$  aus Tabelle 6.1.



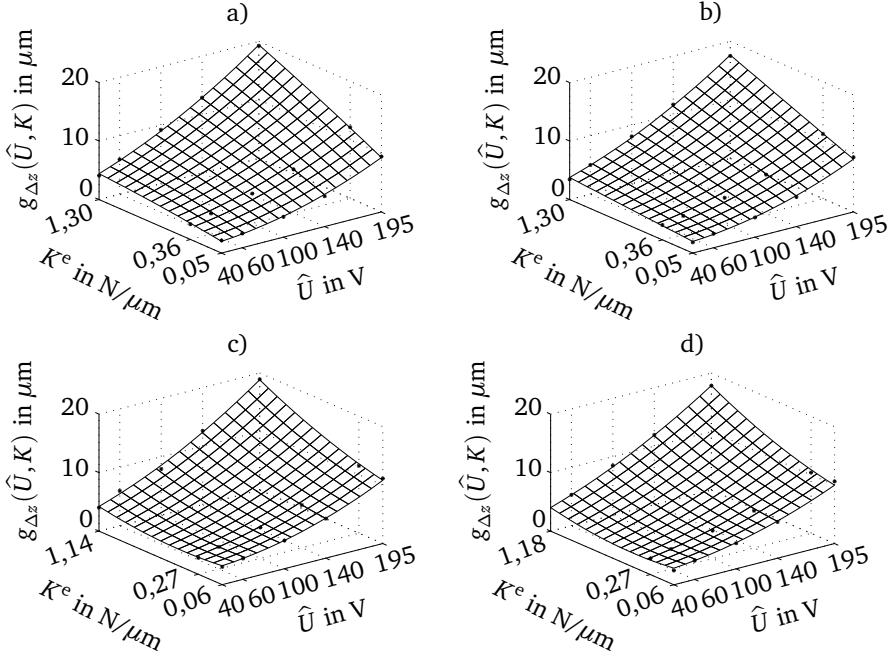
**Abbildung 6.1:** Regressionsfunktionen  $g_F(\hat{U}, K)$  in

- a) für die Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$  und die Frequenz  $f_1 = 1 \text{ Hz}$
- b) für die Vorspannkraft  $F_{v,2} = 20 \text{ N}$  und die Frequenz  $f_1 = 1 \text{ Hz}$
- c) für die Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$  und die Frequenz  $f_2 = 27 \text{ Hz}$
- d) für die Vorspannkraft  $F_{v,2} = 20 \text{ N}$  und die Frequenz  $f_2 = 27 \text{ Hz}$

Die Bestimmtheitsmaße  $R^2$  der beiden Regressionsfunktionen  $g_F(\hat{U}, K)$  für die Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$  und  $F_{v,2} = 20 \text{ N}$  in Abbildungen 6.1 und betragen  $\approx 0,99$ . Damit bilden die Regressionsfunktionen  $g_F(\hat{U}, K)$  99% der Variabilität in den Abweichungen  $\delta F_{a,i}$  (\*) ab. Die Werte der Regressionsfunktion  $g_F(\hat{U}, K)$  in Abbildung 6.1 werden mit zunehmender Vorspannkraft  $F_v$  kleiner, weil die

Abweichungen  $\delta F_{a,i}$  mit zunehmender Vorspannkraft  $F_v$  ebenfalls kleiner werden, siehe Abbildung 5.7 in Abschnitt 5.3.1.

Abbildung 6.2 zeigt die Regressionsfunktionen  $g_{\Delta z}(\hat{U}, K)$  der Abweichungen  $\delta \Delta z_{a,i}$  zwischen den gemessenen und nominalen Stellwegen für die Vorspannkräfte  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$  und  $F_{v,2} = 20 \text{ N}$  und die Frequenzen  $f_1 = 1 \text{ Hz}$  und  $f_2 = 27 \text{ Hz}$ .



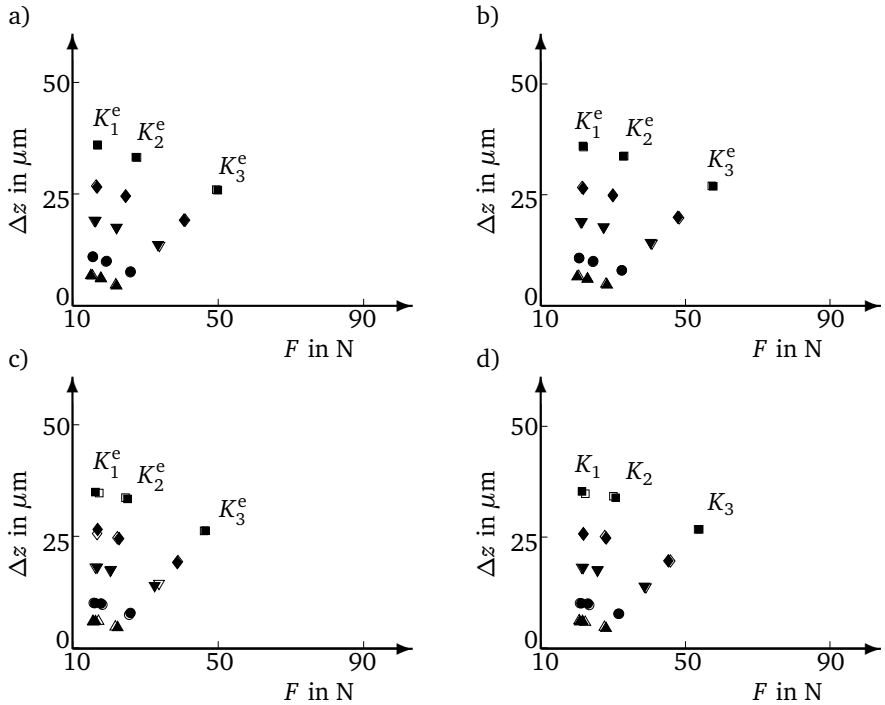
**Abbildung 6.2:** Regressionsfunktionen  $g_{\Delta z}(\hat{U}, K)$  in

- a) für die Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$  und die Frequenz  $f_1 = 1 \text{ Hz}$
- b) für die Vorspannkraft  $F_{v,2} = 20 \text{ N}$  und die Frequenz  $f_1 = 1 \text{ Hz}$
- c) für die Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$  und die Frequenz  $f_2 = 27 \text{ Hz}$
- d) für die Vorspannkraft  $F_{v,2} = 20 \text{ N}$  und die Frequenz  $f_2 = 27 \text{ Hz}$

Die Bestimmtheitsmaße  $R^2$  der Regressionsfunktionen  $g_{\Delta z}(\hat{U}, K)$  für die Vorspannkräfte  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$  und  $F_{v,2} = 20 \text{ N}$  betragen  $\approx 0,99$ . Damit bilden die Regressionsfunktionen  $g_{\Delta z}(\hat{U}, K)$  99% der Variabilität in den ermittelten Abweichungen  $\delta \Delta z_{a,i}$  (\*) ab. Die Werte der Regressionsfunktion  $g_{\Delta z}(\hat{U}, K)$  werden mit zunehmender Vorspannkraft  $F_v$  kleiner, weil die Abweichungen  $\delta \Delta z_{a,i}$  mit zunehmender Vorspannkraft ebenfalls kleiner werden, siehe Abbildung 5.8 in Abschnitt 5.3.1. Im nächsten Abschnitt werden die angepassten Arbeitspunkte ermittelt.

## 6.2 Ermittlung der angepassten Arbeitspunkte

Die bekannten Regressionsfunktionen  $g_F(\hat{U}, K)$  und  $g_{\Delta z}(\hat{U}, K)$  der Abbildungen 6.1 und 6.2 werden ins Gleichungssystem (6.1) eingesetzt, um die angepassten Stellkräfte und -wege  $\tilde{F}_a$  und  $\Delta \tilde{z}_a$  zu ermitteln. Abbildung 6.3 zeigt die angepassten  $(\tilde{F}_a; \Delta \tilde{z}_a)$  und die gemessenen Arbeitspunkte  $(F_a^e; \Delta z_a^e)$ .



**Abbildung 6.3:** Experimentelle und angepasste Arbeitspunkte mit  $\triangle$  und  $\blacktriangle$  für  $\hat{U}_1 = 40$  V,  $\circ$  und  $\bullet$  für  $\hat{U}_2 = 60$  V,  $\diamond$  und  $\blacklozenge$  für  $\hat{U}_3 = 100$  V,  $\nabla$  und  $\blacktriangledown$  für  $\hat{U}_4 = 140$  V,  $\square$  und  $\blacksquare$  für  $\hat{U}_5 = 195$  V, für die Balkensteifigkeiten  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$  in

- a) für die Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15$  N und die Frequenz  $f_1 = 1$  Hz
  - b) für die Vorspannkraft  $F_{v,2} = 20$  N und die Frequenz  $f_1 = 1$  Hz
  - c) für die Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15$  N und die Frequenz  $f_2 = 27$  Hz
  - d) für die Vorspannkraft  $F_{v,2} = 20$  N und die Frequenz  $f_2 = 27$  Hz
- vgl. mit Abbildung 5.6

Die Abweichungen zwischen den angepassten und experimentellen Arbeitspunkten in Abbildung 6.3 sind relativ klein. Zur Erinnerung die mehrdimensionalen Regressionen basieren auf die Minimierung der Summe der Quadrate der Residuen nach der Fehlerquadratmethode in Gleichung (6.3) und sind nicht mit einem Verschwinden der Residuen gleichzusetzen. Die Residuen  $(\delta F_{a,i} - g_{F,i})$  der Regressionsfunktionen  $g_F(\hat{U}, K)$  in Abbildung 6.1 sind im Anhang A.5 dargestellt und sie liegen innerhalb eines Bereichs von  $\pm 1,5\text{ N}$ . Die Residuen  $(\delta \Delta z_{a,i} - g_{\Delta z,i})$  der Regressionsfunktionen  $g_{\Delta z}(\hat{U}, K)$  in Abbildung 6.2 sind im Anhang A.6 dargestellt und sie liegen innerhalb eines Bereichs von  $\pm 0,3\text{ }\mu\text{m}$ .

Tabelle 6.2 zeigt die Stellkräfte und -wege  $\tilde{F}_a$  und  $\Delta \tilde{z}_a$  der angepassten Arbeitspunkte in Abbildung 6.3.

**Tabelle 6.2:** Stellkräfte und -wege  $\tilde{F}_{a,i}$  und  $\Delta \tilde{z}_{a,i}$  der angepassten Arbeitspunkte in Abbildung 6.3

|       |             |    | $f_1$                    |  |                          |  | $f_2$                    |  |                          |  |
|-------|-------------|----|--------------------------|--|--------------------------|--|--------------------------|--|--------------------------|--|
|       |             |    | $F_{v,1}$                |  | $F_{v,2}$                |  | $F_{v,1}$                |  | $F_{v,2}$                |  |
|       |             |    | $\tilde{F}_{a,i}$<br>[N] | $\Delta\tilde{z}_{a,i}$<br>[ $\mu\text{m}$ ] | $\tilde{F}_{a,i}$<br>[N] | $\Delta\tilde{z}_{a,i}$<br>[ $\mu\text{m}$ ] | $\tilde{F}_{a,i}$<br>[N] | $\Delta\tilde{z}_{a,i}$<br>[ $\mu\text{m}$ ] | $\tilde{F}_{a,i}$<br>[N] | $\Delta\tilde{z}_{a,i}$<br>[ $\mu\text{m}$ ] |
| $K_1$ | $\hat{U}_1$ | 1  | 15,0                     | 6,72   | 20,03                    | 6,48   | 15,64                    | 5,80   | 20,78                    | 5,86   |
|       | $\hat{U}_2$ | 2  | 15,51                    | 10,95  | 20,54                    | 10,74  | 16,11                    | 10,03  | 21,16                    | 10,06  |
|       | $\hat{U}_3$ | 3  | 16,29                    | 19,00  | 21,30                    | 18,86  | 16,72                    | 18,06  | 21,64                    | 18,09  |
|       | $\hat{U}_4$ | 4  | 16,73                    | 26,53  | 21,69                    | 26,44  | 16,85                    | 25,53  | 21,77                    | 25,65  |
|       | $\hat{U}_5$ | 5  | 16,78                    | 36,03  | 21,61                    | 35,99  | 16,27                    | 34,90  | 21,36                    | 35,28  |
| $K_2$ | $\hat{U}_1$ | 6  | 17,82                    | 5,99   | 22,89                    | 6,01   | 16,25                    | 5,89   | 21,51                    | 5,98   |
|       | $\hat{U}_2$ | 7  | 19,34                    | 9,95   | 24,48                    | 10,03  | 17,79                    | 9,91   | 23,00                    | 9,98   |
|       | $\hat{U}_3$ | 8  | 22,11                    | 17,47  | 27,39                    | 17,66  | 20,51                    | 17,53  | 25,71                    | 17,62  |
|       | $\hat{U}_4$ | 9  | 24,56                    | 24,47  | 29,92                    | 24,77  | 22,76                    | 24,58  | 28,06                    | 24,78  |
|       | $\hat{U}_5$ | 10 | 27,36                    | 33,24  | 32,80                    | 33,66  | 25,09                    | 33,37  | 30,70                    | 33,86  |
| $K_3$ | $\hat{U}_1$ | 11 | 22,06                    | 4,38   | 28,30                    | 4,62   | 22,37                    | 4,53   | 28,00                    | 4,41   |
|       | $\hat{U}_2$ | 12 | 25,94                    | 7,59   | 32,41                    | 7,94   | 25,88                    | 7,81   | 31,63                    | 7,69   |
|       | $\hat{U}_3$ | 13 | 33,44                    | 13,62  | 40,35                    | 14,19  | 32,55                    | 13,93  | 38,63                    | 13,90  |
|       | $\hat{U}_4$ | 14 | 40,60                    | 19,12  | 47,92                    | 19,90  | 38,75                    | 19,50  | 45,27                    | 19,63  |
|       | $\hat{U}_5$ | 15 | 49,90                    | 25,83  | 57,72                    | 26,88  | 46,51                    | 26,25  | 53,81                    | 26,74  |

Die besten Ergebnisse der Modellanpassung sind bei der Balkensteifigkeit  $K_3$  und der Spannungsamplitude  $\hat{U}_5 = 195 \text{ V}$  zu sehen, z. B. mit einer angepassten Stellkraft von  $\hat{F}_{a,15} = 49,90 \text{ N}$  und einem Stellweg von  $\Delta \hat{z}_{a,15} = 25,83 \mu\text{m}$  im Vergleich zu den gemessenen Werten  $F_{a,3}^e = 49,48 \text{ N}$  und  $\Delta z_{a,3}^e = 25,94 \mu\text{m}$  in Tabelle 5.2 für die Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$  und die Frequenz  $f_1 = 1 \text{ Hz}$ . Dies entspricht einer Übereinstimmung von  $\approx 90\%$  zwischen den gemessenen und den angepassten Arbeitspunkten in Abbildung 6.3 bei der Spannungsamplitude  $\hat{U}_5 = 195 \text{ V}$  und der Vorspannkraft  $F_v = 15 \text{ N}$  im kritischen Arbeitspunkt des Stapelaktuators im aktiven System, siehe Abbildung 2.8b.

Tabelle 6.3 zeigt die Abweichungen zwischen den Stellkräften und -wegen der angepassten und experimentellen Arbeitspunkte in Abbildung 6.3.

**Tabelle 6.3:** Abweichungen zwischen den Stellkräften und -wegen  $\delta F_{a,i}$  und  $\delta \Delta z_{a,i}$  der angepassten und experimentellen Arbeitspunkte in Abbildung 6.3

|       |             |    | $f_1$                   |  |                         |  | $f_2$                   |  |                         |  |
|-------|-------------|----|-------------------------|--|-------------------------|--|-------------------------|--|-------------------------|--|
|       |             |    | $F_{v,1}$               |  | $F_{v,2}$               |  | $F_{v,1}$               |  | $F_{v,2}$               |  |
|       | $i$         |    | $\delta F_{a,i}$<br>[N] | $\delta \Delta z_{a,i}$<br>[ $\mu\text{m}$ ] | $\delta F_{a,i}$<br>[N] | $\delta \Delta z_{a,i}$<br>[ $\mu\text{m}$ ] | $\delta F_{a,i}$<br>[N] | $\delta \Delta z_{a,i}$<br>[ $\mu\text{m}$ ] | $\delta F_{a,i}$<br>[N] | $\delta \Delta z_{a,i}$<br>[ $\mu\text{m}$ ] |
| $K_1$ | $\hat{U}_1$ | 1  | -0,45                   | 0,10   | -0,39                   | -0,10  | 0,08                    | 0,55   | 0,19                    | -0,29  |
|       | $\hat{U}_2$ | 2  | -0,05                   | 0,08   | -0,02                   | 0,09   | 0,32                    | 0,71   | 0,34                    | -0,01  |
|       | $\hat{U}_3$ | 3  | 0,31                    | -0,08  | 0,29                    | -0,07  | 0,46                    | 0,78   | 0,36                    | -0,07  |
|       | $\hat{U}_4$ | 4  | 0,27                    | -0,23  | 0,30                    | -0,18  | 0,15                    | 0,84   | 0,05                    | -0,12  |
|       | $\hat{U}_5$ | 5  | -0,08                   | 0,13   | -0,17                   | 0,26   | -1,02                   | 1,33   | -0,94                   | 0,49   |
| $K_2$ | $\hat{U}_1$ | 6  | 0,09                    | -0,13  | 0,00                    | 0,09   | -0,81                   | 0,04   | -0,74                   | 0,22   |
|       | $\hat{U}_2$ | 7  | 0,17                    | 0,11   | 0,12                    | 0,19   | -0,37                   | 0,37   | -0,39                   | 0,33   |
|       | $\hat{U}_3$ | 8  | 0,08                    | 0,01   | 0,09                    | -0,04  | 0,16                    | 0,31   | 0,07                    | 0,14   |
|       | $\hat{U}_4$ | 9  | -0,04                   | -0,07  | 0,02                    | -0,16  | 0,46                    | 0,10   | 0,40                    | -0,34  |
|       | $\hat{U}_5$ | 10 | -0,30                   | 0,08   | -0,23                   | -0,08  | 0,56                    | 0,02   | 0,66                    | -0,36  |
| $K_3$ | $\hat{U}_1$ | 11 | 0,22                    | -0,24  | 0,30                    | -0,22  | 0,64                    | -0,06  | 0,45                    | -0,23  |
|       | $\hat{U}_2$ | 12 | 0,07                    | 0,16   | 0,03                    | 0,03   | 0,37                    | 0,52   | 0,19                    | 0,02   |
|       | $\hat{U}_3$ | 13 | -0,40                   | 0,19   | -0,39                   | 0,15   | -1,17                   | -0,22  | -0,41                   | 0,17   |
|       | $\hat{U}_4$ | 14 | -0,31                   | 0,01   | -0,37                   | 0,14   | -0,20                   | 0,58   | -0,54                   | 0,04   |
|       | $\hat{U}_5$ | 15 | 0,42                    | -0,11  | 0,43                    | -0,11  | 0,37                    | 0,69   | 0,31                    | -0,01  |

---

Die Ergebnisse der Modellanpassung des deterministischen Arbeitsdiagramms in Abbildung 6.3 gelten für die untersuchten Stapelaktuatoren, Balkensteifigkeiten  $K_1 < K_2 < K_3$ , Vorspannkraften  $F_{v,1}$  und  $F_{v,2}$ , Spannungsamplituden  $\hat{U}_1, \hat{U}_2, \dots, \hat{U}_5$  und Frequenzen  $f_1$  und  $f_2$  des untersuchten aktiven Systems. Trotzdem ist die hier durchgeführte Modellanpassung auf anderen piezoelektrischen Stapelaktuatoren in anderen aktiven Systemen übertragbar.

Der Ablauf der durchgeführten Modellanpassung wird im nächsten Abschnitt zusammengefasst und die erzielten Ergebnisse werden diskutiert.

---

### 6.3 Zusammenfassung und Diskussion der Modellanpassung

---

Das deterministische Arbeitsdiagramm im Gleichungssystem (2.11) wurde an die experimentellen Arbeitspunkte in Kapitel 5 angepasst, um eine Überschätzung der gemessenen Stellkräfte und -wege zu vermeiden. Diese Modellanpassung besteht aus:

1. der Ermittlung der numerischen Stellkräfte und -wege bzw. der nominalen Arbeitspunkte mit dem Gleichungssystem (2.11) des deterministischen Arbeitsdiagramms in Abschnitt 4.2,
2. der Messung der Stellkräfte und -wege bzw. der experimentellen Arbeitspunkte, siehe Kapitel 5,
3. der Ermittlung der Abweichungen zwischen den numerischen und gemessenen Stellkräften und -wegen der nominalen und experimentellen Arbeitspunkte mit dem Gleichungssystem (5.4) in Abschnitt 5.3.1,
4. der Ermittlung der funktionalen Abhängigkeiten zwischen den ermittelten Abweichungen, der Spannungsamplitude  $\hat{U}$  und Frequenz  $f$  der Betriebsspannung  $U(t)$ , der Vorspannkraft  $F_v$  und der Balkensteifigkeit  $K$  mit mehrdimensionalen Regressionen, siehe das Gleichungssystem (6.2) in Abschnitt 6.1 und
5. der Ermittlung der angepassten Arbeitspunkte mit dem Gleichungssystem (6.1) in Kapitel 6.

Die Abweichungen zwischen den Stellkräften und -wegen der nominalen und experimentellen Arbeitspunkte werden mit der Modellanpassung minimiert, z. B. bis auf 0,42 N und  $-0,11 \mu\text{m}$  für die Balkensteifigkeit  $K_3$ , die Spannungsamplitude  $\hat{U}_5 = 195 \text{ V}$ , die Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15 \text{ N}$  und die Frequenz  $f_1 = 1 \text{ Hz}$  in Tabelle 6.3. Eine weitere Reduzierung dieser Abweichungen kann mit Polynomen höherer



---

Ordnung ( $\geq 3$ ) für die Regressionsfunktionen  $g_F(\hat{U}, K)$  und  $g_{\Delta z}(\hat{U}, K)$  im Schritt 4. der Modellanpassung erreicht werden. Eine solche Reduzierung ist dann möglich, wenn zusätzliche gemessene Arbeitspunkte mit ihren jeweiligen Abweichungen  $\delta F_a$  und  $\delta \Delta z_a$  aus der Messung weiterer Balkensteifigkeiten  $K$  und Spannungsamplituden  $\hat{U}$  verfügbar sind. In diesem Sinn ist ein Einsatz von Polynomen höherer Ordnung mit einem erhöhten Versuchsaufwand verbunden. Aus diesem Grund ist eine Beurteilung der Güte der Regressionsmodelle z. B. mit dem Bestimmtheitsmaß  $R^2$  in Gleichung (6.5) besonders wichtig.

Die hier vorgestellte Modellanpassung mit mehrdimensionalen Regressionen betrachtet die Abweichungen zwischen den gemessenen und den numerischen Stellkräften  $\delta F_a$  und -wegen  $\delta \Delta z_a$  der nominalen und experimentellen Arbeitspunkte, ohne die in Kapitel 5 angegebenen Ursachen bzw. Unsicherheiten wie die endliche Steifigkeit der Einspannvorrichtung, der Einfluss der Vorspannkraft auf die Kraft-Weg-Kennlinie des Stapelaktuators, das nichtlineare Verhalten des PZT-Werkstoffs und das dynamische Verhalten jedes Balkens bei der Frequenz  $f_2 = 27 \text{ Hz}$  zu berücksichtigen. Dadurch kann sie unabhängig einer Reduzierung dieser Abweichungen mit Maßnahmen wie die Messung der Verformung der Klemmbanke (Position Nr. 17 in Abbildung 5.3) mit einem zusätzlichem Laser-Triangulationssensor und die Berücksichtigung der Vorspannkraft und der dynamischen Steifigkeit des Balkens in den Kraft-Weg-Kennlinien des Stapelaktuators und des Balkens durchgeführt werden.

Beim aktiven Balkensystem zur Stabilisierung eines knickgefährdeten Balkens in Abschnitt 2.2, müssen die tatsächlichen Stellkräfte und -wege des Stapelaktuators im montierten Zustand in Abbildung 2.4 gemessen werden, damit die gezeigte Modellanpassung mit mehrdimensionalen Regressionsmodellen durchgeführt werden kann. Die hier vorgestellte Modellanpassung ist, trotz des Aufwands für die Gewinnung der experimentellen Arbeitspunkte, auf andere Anwendungen mit Stapelaktuatoren anwendbar und sie führt sowohl bei quasistatischen als auch bei dynamischen Ansteuerungsfrequenzen der Stapelaktuatoren zu gleich guten Ergebnissen.

Die Ergebnisse der vorliegenden wissenschaftlichen Arbeit werden im nächsten Kapitel zusammengefasst.

---

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Streuungen in den Eigenschaften eines piezoelektrischen Stapelaktuators und eines Balkens als Unsicherheit in der Ermittlung der Stellkräfte und -wege des Stapelaktuators mit seinem Arbeitsdiagramm zu beschreiben und zu bewerten, um z. B. ein unerwünschtes Verhalten eines aktiven Systems bereits in seiner Entwicklung zu erkennen und zu vermeiden. Als Anwendungsbeispiel dient ein aktives System, in dem ein schlanker Balken lateral mit einer aktiven Kraft aus einem Stapelaktuator belastet wird, der wiederum Nahe seinem maximal freien Stellweg betrieben wird. Die Blockierkraft, der maximale freie Stellweg, die maximale elektrische Betriebsspannung und die mechanische Vorspannkraft des Stapelaktuators, der Angriffspunkt der aktiven Kraft auf dem Balken, seine Breite und Dicke und der Elastizitätsmodul des Balkenwerkstoffs (Aluminium) werden im Arbeitsdiagramm berücksichtigt, um die Stellkräfte und -wege des Stapelaktuators für eine bestimmte elektrische Betriebsspannung numerisch zu ermitteln.

Die angenommenen Streuungen in den zitierten Aktuator- und Balkeneigenschaften werden mit ihren Nominal- und Grenzwerten aus dem Aktuatordatenblatt und den genormten Toleranzen für die geometrischen Abmessungen des Balkens beschrieben, so dass die Unsicherheitskategorie Ungewissheit des Unsicherheitsmodells vom SFB 805 in Kapitel 3 vorliegt.

Die Wirkungen der angenommenen Streuungen auf die numerischen Stellkräfte und -wege des Stapelaktuators sind mit Worst-Case Analysen und Monte Carlo-Simulationen (MCS) zu den Arbeitspunkten des Stapelaktuators numerisch bewertet worden. Die Anwendung der Worst-Case Analysen und MCS führen zu einer Erweiterung vom deterministischen zum nichtdeterministischen Arbeitsdiagramm, das zusätzliche Informationen als die Stellkräfte und -wege der nominalen Arbeitspunkte des Stapelaktuators liefert.

Worst-Case Analysen liefern für jeden nominalen Arbeitspunkt im Arbeitsdiagramm eine Unsicherheitsregion  $\mathbb{U}$ , in der die Stellkräfte und -wege eines Stapelaktuators variieren können, siehe Abbildung 4.4. Die Inhaltsfläche einer Unsicherheitsregion  $\mathbb{U}$  wird mit zunehmender Balkensteifigkeit, elektrischen Betriebsspannung und mechanischen Vorspannkraft größer. Dabei zeigt diese Inhaltsfläche einen nichtlinearen und einen linearen Verlauf in Abhängigkeit der elektrischen Betriebsspannung und der mechanischen Vorspannkraft. Aus jeder Unsicherheitsregion  $\mathbb{U}$  sind Grenzwerte für die Stellkräfte und -wege des

---

Stapelaktuator abzu lesen, so dass die Ergebnisse der Worst-Case Analysen in Tabelle 4.3 ebenfalls der Ungewissheit zuzuordnen sind.

MCS liefern u. a. die Verteilungen der Arbeitspunkte innerhalb einer Unsicherheitsregion  $\mathbb{U}$  sowie die Erwartungswerte, Standardabweichungen und Häufigkeitsverteilungen der Stellkräfte und -wege in Abhängigkeit angenommener Normal- und Gleichverteilungen der streuenden Aktuator- und Balkeneigenschaften, siehe Abbildung 4.13. Die Ergebnisse der MCS in den Tabellen 4.5 bis 4.7 sind aufgrund der ermittelten Häufigkeitsverteilungen der Stellkräfte und -wege des Stapelaktuator der stochastischen Unsicherheit zuzuordnen.

Zur Überprüfung der numerischen Ergebnisse aus den Worst-Case Analysen und MCS sind die Stellkräfte und -wege baugleicher Stapelaktuatoren in Verbindung mit Balken mit unterschiedlichen Dicken in einem experimentellen aktiven System gemessen worden. Die untersuchten Stapelaktuatoren erzeugen bei gleicher elektrischer Betriebsspannung, mechanischer Vorspannkraft und Balkensteifigkeit unterschiedliche Arbeitspunkte, die jeweils in einer experimentellen Unsicherheitsregion  $\mathbb{U}^e$  liegen. Die experimentellen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}^e$  sind bis zu 73 % kleiner als die numerischen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}$ , weil u. a. die Streuungen in den gemessenen Aktuator- und Balkeneigenschaften kleiner als ihre angenommene Werte in den Worst-Case Analysen sind. Die experimentellen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}^e$  werden, wie die numerischen Unsicherheitsregionen  $\mathbb{U}$ , mit zunehmender elektrischer Betriebsspannung und Balkensteifigkeit größer und sie zeigen einen nichtlinearen Verlauf bei zunehmender Betriebsspannung. Der Vergleich zwischen den numerischen und gemessenen Stellkräften und -wegen zeigt eine Modellunsicherheit in der Anwendung des Arbeitsdiagramms auf das untersuchte aktive System. Diese Modellunsicherheit wird anhand der Abweichungen zwischen den numerischen und gemessenen Stellkräften und -wegen in Kapitel 5 beschrieben und sie entsteht aufgrund von unberücksichtigten Faktoren wie die endliche Steifigkeit der Einspannvorrichtung im Versuchsstand, die Nichtlinearitäten des PZT-Werkstoffs, der Einfluss der Vorspannkraft auf die Kraft-Weg-Kennlinie des Stapelaktuator und das dynamische Verhalten der Balken im deterministischen Arbeitsdiagramm aus Kapitel 2. Eine Modellanpassung des deterministischen Arbeitsdiagramms basierend auf mehrdimensionale Regressionen über die Abweichungen zwischen den numerischen und gemessenen Stellkräften und -wegen wird in Kapitel 6 vorgestellt. Sie führt zu einer guten Übereinstimmung zwischen den numerisch angepassten und gemessenen Arbeitspunkten, siehe Abbildung 6.3 in Kapitel 6.

Die Erweiterung des deterministischen Arbeitsdiagramms mit Worst-Case Analysen und MCS zeigt das Potential und den Mehrwert des neuen Ansatzes des SFB 805 zur Beschreibung und Bewertung der Unsicherheit in der Ermittlung der

---

Stellkräfte und -wege piezoelektrischer Stapelaktuatoren in aktiven lasttragenden Systemen. Mit der Beschreibung und Bewertung der Unsicherheit werden z.B. die Wahrscheinlichkeit einer Überschreitung des maximalen freien Stellwegs eines Stapelaktuators und die Variationen in den Stellkräften und -wegen aufgrund der Unsicherheit quantifiziert. Diese Arbeit unterstreicht auch die Wichtigkeit einer Messung der tatsächlichen Stellkräfte und -wege eines Stapelaktuators im realen aktiven System. Dadurch werden die Abweichungen zwischen den numerischen und gemessenen Stellkräften und -wegen eines Stapelaktuators ermittelt und eine falsche Bewertung der Stellkräfte und -wege eines Stapelaktuators durch eine Modellanpassung mit mehrdimensionalen Regressionen kann vermieden werden. Diese Abweichungen entstehen nicht nur aufgrund von Streuung in den Aktuator- und Balkeneigenschaften im Arbeitsdiagramm. Sie werden auch durch das dynamische Verhalten des Balkens und experimentelle Faktoren wie die endliche Steifigkeit der Einspannvorrichtung im Versuchsstand und eine unvollständige Messung der gesamten Ausdehnung des Stapelaktuators im Versuchsstand verursacht.

Die hier vorgestellten Worst-Case Analysen und MCS sind auf weitere technische Systeme mit piezoelektrischen Stapelaktuatoren, die mit bestimmten Arbeitspunkten betrieben werden wie Mikropumpen und -ventilen, Positioniersysteme und andere aktive Schließ- und Öffnungsmechanismen, anwendbar. Die Ermittlung der Unsicherheitsregionen aus Worst-Case Analysen würde z. B. eine Quantifizierung der Variationen im Durchfluss einer Mikropumpe oder in der Position eines beweglichen Systemelements aufgrund von Streuung in den Aktuator- und Struktureigenschaften ermöglichen.

Zwei weiterführende wissenschaftliche Fragestellungen können aus der vorliegenden Arbeit abgeleitet werden:

- die Beschreibung und Bewertung der Unsicherheit in einem gesamten aktiven System mit den Eigenschaften seiner piezoelektrischen Stapelaktuatoren, Sensoren, Regelung und passiven Struktur. Die Bewertung der Unsicherheit mit Worst-Case Analysen, MCS und die experimentelle Validierung der numerischen Ergebnisse sind aufgrund der gegebenen Systemkomplexität besonders herausfordernd [15], und
- die Erweiterung der linearen Kraft-Weg-Kennlinie des Stapelaktuators in Gleichung (2.1), um die Einflüsse der Vorspannkraft auf die Stellkräfte und -wege piezoelektrischer Stapelaktuatoren aus dem deterministischen Arbeitsdiagramm zu berücksichtigen.

# Anhang

## A.1 Datenblatt eines Stapelaktuators vom Typ 3 9999-62

Abbildung A.1 zeigt einen Auszug aus dem Datenblatt [11] des untersuchten piezoelektrischen Stapelaktuators vom Typ 3 9999-62 in Abbildung 2.8.

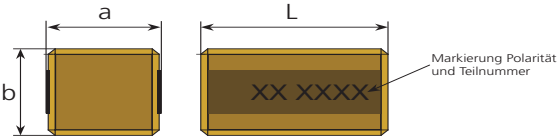
ausgewählter  
Stapelaktuator

| a<br>mm<br>± 0,1 | b<br>mm<br>± 0,1 | L<br>mm<br>± 0,05 | S <sub>3</sub><br>µm<br>± 10% | F <sub>B</sub><br>N<br>± 10% | C<br>nF<br>± 10% | f <sub>r</sub><br>kHz<br>± 10% |
|------------------|------------------|-------------------|-------------------------------|------------------------------|------------------|--------------------------------|
| 5,6              | 5,1              | 5,0               | 6                             | 850                          | 140              | 228                            |
| 5,6              | 5,1              | 10,0              | 13                            | 900                          | 280              | 114                            |
| 5,6              | 5,1              | 20,0              | 29                            | 900                          | 620              | 57                             |
| 5,6              | 5,1              | 30,0              | 45                            | 900                          | 970              | 38                             |
| 7,6              | 7,1              | 10,0              | 13                            | 1800                         | 570              | 114                            |
| 7,6              | 7,1              | 20,0              | 29                            | 1900                         | 1300             | 57                             |
| 7,6              | 7,1              | 30,0              | 45                            | 1900                         | 2000             | 38                             |
| 10,6             | 10,1             | 10,0              | 13                            | 3800                         | 1200             | 114                            |
| 10,6             | 10,1             | 20,0              | 29                            | 4000                         | 2700             | 57                             |
| 10,6             | 10,1             | 30,0              | 45                            | 4000                         | 4200             | 38                             |

Besondere Geometrien (z. B. 14 x 14) auf Anfrage  
Alle angegebenen Maße beziehen sich auf die Gesamtgröße. Die keramische Fläche beträgt: 5 x 5, 7 x 7 bzw. 10 x 10 mm²  
Ergebnisse bei quasistatischer Messung im Großsignalbetrieb:  
S<sub>3</sub> @ 200 V  
F<sub>B</sub> @ 200 V, 10 MPa Vorspannung  
C @ 1 V, 1000 Hz

### Anwendungs-Grenzwerte

Spannung: -50 bis max. 200 V  
Last: max. 100 MPa  
Temperatur: -40 bis max. 130 °C bei dynamischen Bedingungen  
Feuchtigkeit: 70% rF bei dynamischen Bedingungen



\* kundenspezifische Lösungen verfügbar

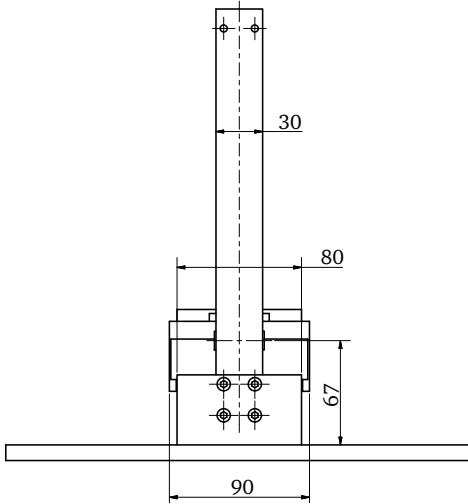
Abbildung A.1: Auszug aus dem Datenblatt des Stapelaktuators vom Typ 3 9999-62 mit den Nominalwerten und Streuungen seiner Eigenschaften

---

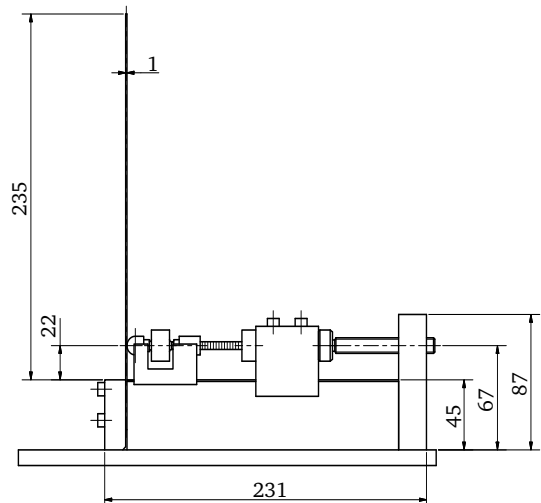
## A.2 Geometrische Hauptabmessungen der Einspannvorrichtung

---

Vorderansicht



Seitenansicht

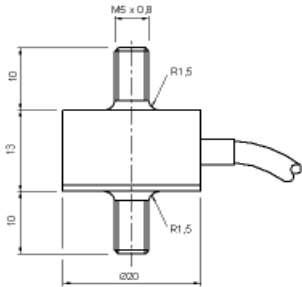
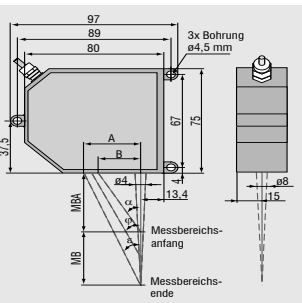


**Abbildung A.2:** Hauptabmessungen der Einspannvorrichtung des Stapelaktuators und des Balkens im aktiven System — alle Angaben in mm

### A.3 Technische Daten des Kraftaufnehmers und des Laser-Triangulationssensors

Alle technischen Angaben, Bilder und Abmessungen sind aus den Datenblättern des jeweiligen Sensors entnommen worden [6, 58].

**Tabelle A.3:** technische Daten des Kraftaufnehmers ALF251FR0HN-1,6kN und des Laser-Triangulationssensors optoNCDT ILD 2200-2

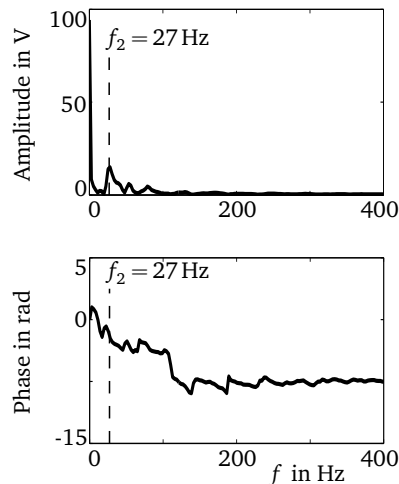
|  |                          |   |
|--|--------------------------|---|
|  <p>Bild aus [6]</p>    | statische Nennkraft      | 1,6 kN  |
|  | linearitätsabweichung    | $\pm 0,5 \%$ vom Endwert                        |
|  | Hysterese                | $\pm 0,5 \%$ vom Endwert                        |
|  | Reproduzierbarkeit       | $\pm 0,1 \%$ vom Endwert                        |
|  | Nennkennwert             | 1,6 mV/V  |
|  | max. Versorgungsspannung | 10 V  |
|  | Brückenwiderstand        | 350 $\Omega$                                    |
|  | Gewicht                  | 8 g bis 11 g                                    |
|  | nominale Steifigkeit     | $6 \times 10^7 \text{ N/m}$                     |
|  <p>Bild aus [58]</p> | max. Gebrauchskraft      | 150% der statischen Nennkraft                   |
|  | Messbereich (MB)         | 2 mm  |
|  | Messbereichsanfang (MBA) | 24 mm   |
|  | Messbereichsmittle       | 25 mm   |
|  | Messbereichsende         | 26 mm   |
|  | A                        | 25,8 mm   |
|  | B                        | 16,8 mm   |
|  | Linearität               | 1 $\mu\text{m}$                                 |
|  | Auflösung                | 0,03 $\mu\text{m}$                              |
|  | Messrate                 | 20 kHz  |
|  | Gewicht                  | $\approx 550 \text{ g}$                         |
|  | Lichtquelle              | Halbleiterlaser $< 1 \text{ mW}$ , 670 nm (rot) |
|  | Ausgang analog           | $\pm 5 \text{ V}$                               |

---

## A.4 Amplituden- und Phasenspektrum der elektrischen Betriebsspannung des Stapelaktuators im aktiven Balkensystem

---

Die Amplituden- und Phasenspektrum des elektrischen Spannungssignals  $U(t)$  werden mit der Fast Fourier Transformation (FFT) seines zeitlichen Verlaufs in Abbildung 2.5 ermittelt. Diese FFT-Transformation erfolgt in Matlab<sup>®</sup> mit der Funktion „fft.m“ [85] mit einer Abtastfrequenz von 10 kHz und sie führt zu den folgenden Amplituden- und Phasenspektrum.



**Abbildung A.4:** Amplituden- und Phasenspektrum der elektrischen Betriebsspannung  $U(t)$  bei einer erfolgreichen Stabilisierung eines knickgefährdeten Balkens

Die Frequenz  $f_2 = 27\text{ Hz}$  wird für die dynamische elektrische Ansteuerung der untersuchten Stapelaktuatoren in Kapitel 5 gewählt, weil der zweite Höchstwert des Amplitudenspektrums bei ihr vorliegt. Der Maximalwert des Amplitudenspektrums liegt bei der Frequenz  $f = 0\text{ Hz}$  und zeigt, dass der Gesamtmittelwert des Spannungssignals  $U(t)$  in Abbildung 2.5 nicht verschwindet. Die Frequenz  $f = 0\text{ Hz}$  ist gleichbedeutend mit dem statischen Fall, so dass sie für die dynamische Ansteuerung der untersuchten Stapelaktuatoren irrelevant ist.

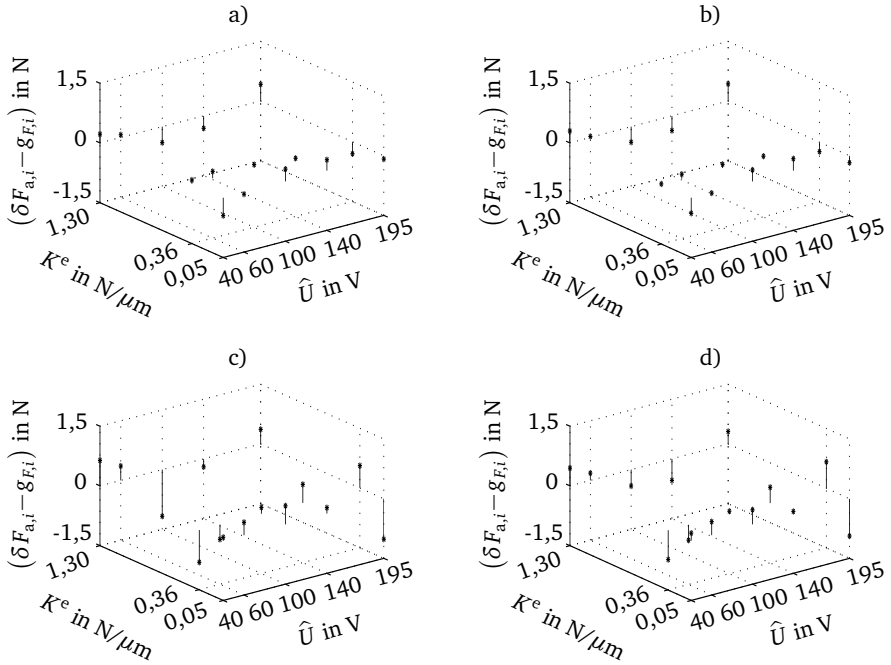


## A.5 Abweichungen zwischen den numerischen und gemessenen Stellkräften und -wegen

**Tabelle A.5:** Abweichungen zwischen den numerischen und gemessenen Stellkräften und -wegen  $\delta F_{a,i}$  und  $\delta \Delta z_{a,i}$

|       |             |    | $f_1$                   |  |                         |  | $f_2$                   |  |                         |  |
|-------|-------------|----|-------------------------|--|-------------------------|--|-------------------------|--|-------------------------|--|
|       |             |    | $F_{v,1}$               |  | $F_{v,2}$               |  | $F_{v,1}$               |  | $F_{v,2}$               |  |
|       | $i$         |    | $\delta F_{a,i}$<br>[N] | $\delta \Delta z_{a,i}$<br>[ $\mu\text{m}$ ] | $\delta F_{a,i}$<br>[N] | $\delta \Delta z_{a,i}$<br>[ $\mu\text{m}$ ] | $\delta F_{a,i}$<br>[N] | $\delta \Delta z_{a,i}$<br>[ $\mu\text{m}$ ] | $\delta F_{a,i}$<br>[N] | $\delta \Delta z_{a,i}$<br>[ $\mu\text{m}$ ] |
| $K_1$ | $\hat{U}_1$ | 1  | -0,01                   | 1,61   | 0,02                    | 1,40   | -0,11                   | 2,29   | -0,15                   | 1,83   |
|       | $\hat{U}_2$ | 2  | 0,10                    | 1,85   | 0,10                    | 1,81   | -0,13                   | 2,68   | -0,15                   | 2,40   |
|       | $\hat{U}_3$ | 3  | 0,13                    | 2,61   | 0,09                    | 2,52   | -0,15                   | 3,62   | -0,17                   | 3,28   |
|       | $\hat{U}_4$ | 4  | 0,10                    | 3,91   | 0,16                    | 3,80   | -0,15                   | 5,07   | -0,17                   | 4,65   |
|       | $\hat{U}_5$ | 5  | 0,30                    | 7,12   | 0,37                    | 7,03   | -0,13                   | 8,35   | -0,14                   | 7,98   |
| $K_2$ | $\hat{U}_1$ | 6  | 0,75                    | 1,96   | 0,59                    | 1,90   | 1,42                    | 2,11   | 1,24                    | 2,07   |
|       | $\hat{U}_2$ | 7  | 1,06                    | 2,66   | 0,86                    | 2,40   | 2,06                    | 2,83   | 1,84                    | 2,59   |
|       | $\hat{U}_3$ | 8  | 1,66                    | 3,85   | 1,40                    | 3,36   | 3,35                    | 3,96   | 3,06                    | 3,59   |
|       | $\hat{U}_4$ | 9  | 2,59                    | 5,60   | 2,29                    | 4,97   | 4,89                    | 5,48   | 4,52                    | 4,77   |
|       | $\hat{U}_5$ | 10 | 4,31                    | 9,12   | 3,94                    | 8,29   | 7,44                    | 8,64   | 6,93                    | 7,81   |
| $K_3$ | $\hat{U}_1$ | 11 | 4,39                    | 3,07   | 3,24                    | 2,60   | 4,50                    | 3,01   | 3,68                    | 2,80   |
|       | $\hat{U}_2$ | 12 | 5,98                    | 4,47   | 4,47                    | 3,75   | 6,33                    | 4,48   | 5,40                    | 3,99   |
|       | $\hat{U}_3$ | 13 | 9,24                    | 6,92   | 7,34                    | 6,06   | 9,36                    | 5,93   | 9,04                    | 6,37   |
|       | $\hat{U}_4$ | 14 | 13,40                   | 9,67   | 11,03                   | 8,77   | 15,36                   | 9,46   | 13,51                   | 8,94   |
|       | $\hat{U}_5$ | 15 | 20,28                   | 14,44  | 17,48                   | 13,15  | 23,61                   | 14,20  | 21,26                   | 13,39  |

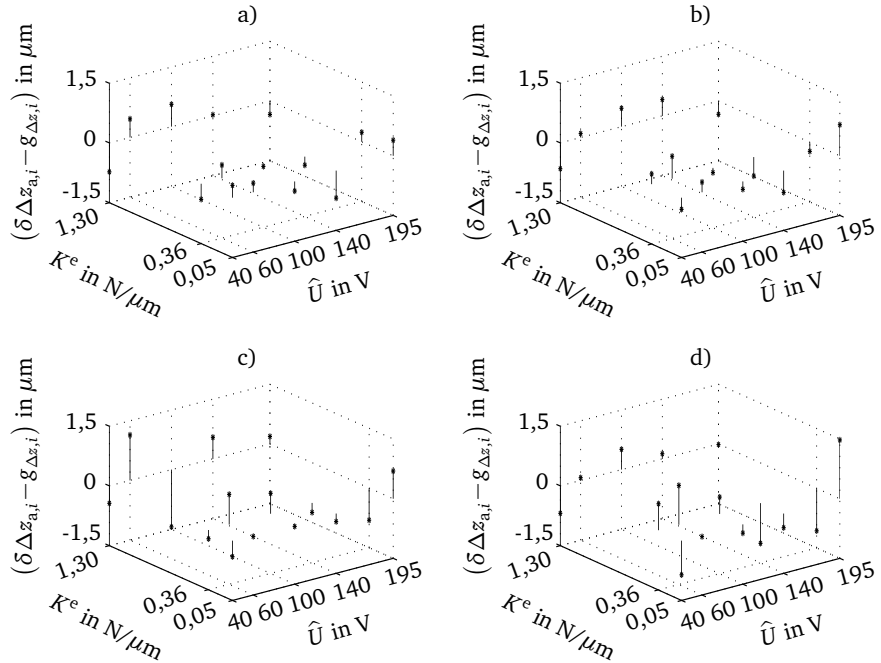
## A.6 Residuen der Regressionsfunktionen $g_F(\hat{U}, K)$



**Abbildung A.6:** Residuen  $(\delta F_{a,i} - g_{F,i})$  der Regressionsfunktionen  $g_F(\hat{U}, K)$  in Abbildung 6.1

- a) für die Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15$  N und die Frequenz  $f_1 = 1$  Hz
- b) für die Vorspannkraft  $F_{v,2} = 20$  N und die Frequenz  $f_1 = 1$  Hz
- c) für die Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15$  N und die Frequenz  $f_2 = 27$  Hz
- d) für die Vorspannkraft  $F_{v,2} = 20$  N und die Frequenz  $f_2 = 27$  Hz

## A.7 Residuen der Regressionsfunktionen $g_{\Delta z}(\hat{U}, K)$



**Abbildung A.7:** Residuen  $(\delta \Delta z_{a,i} - g_{\Delta z,i})$  der Regressionsfunktionen  $g_{\Delta z}(\hat{U}, K)$  in Abbildung 6.2

- a) für die Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15$  N und die Frequenz  $f_1 = 1$  Hz
- b) für die Vorspannkraft  $F_{v,2} = 20$  N und die Frequenz  $f_1 = 1$  Hz
- c) für die Vorspannkraft  $F_{v,1} = 15$  N und die Frequenz  $f_2 = 27$  Hz
- d) für die Vorspannkraft  $F_{v,2} = 20$  N und die Frequenz  $f_2 = 27$  Hz

---

# Literaturverzeichnis

- [1] ADRIAENS, H.; DE KONING, W. L.; BANNING, R.: Modeling piezoelectric actuators. In: *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on* 5 (2000), Nr. 4, S. 331–341.
- [2] ADUNKA, Franz: *Messunsicherheiten: Theorie und Praxis*, 3. Auflage. Vulkan-Verlag GmbH, 2007.
- [3] AGARWAL, H.; RENAUD, J. E.; PRESTON, E. L.; PADMANABHAN, D.: Uncertainty quantification using evidence theory in multidisciplinary design optimization. In: *Reliability Engineering & System Safety* 85 (2004), Nr. 1, S. 281–294.
- [4] AIXACCT SYSTEMS GMBH ADVANCED CUSTOMIZED CHARACTERIZATION TECHNOLOGIES (Hrsg.): *aixCMA with temperatur option, Product Sheet/Documentation*. Aachen: aixACCT Systems GmbH advanced customized characterization technologies, <http://www.aixacct.com/pdfs/SensorsActuators-CMA-Temp.pdf>. – Stand 11.2014.
- [5] ALI, S.F.; FRISWELL, M.I.; ADHIKARI, S.: Piezoelectric energy harvesting with parametric uncertainty. In: *Smart Materials and Structures* 19 (2010), Nr. 10, S. 105010.
- [6] ALTHEN GMBH MESS- UND SENSORTECHNIK: *Kraftaufnehmer ALF250, ALF251 Datenblatt*, [http://www.althen.de/public/media/PDF\\_Datenblatt/1b\\_Kraftmesstechnik/de/ALF250-ALF251-kraftaufnehmer-d.pdf](http://www.althen.de/public/media/PDF_Datenblatt/1b_Kraftmesstechnik/de/ALF250-ALF251-kraftaufnehmer-d.pdf). – Stand 07.2015.
- [7] ALVIN, K. E.; OBERKAMPF, W. L.; DIEGERT, K. V.; RUTHERFORD, B. M.: Uncertainty quantification in computational structural dynamics: a new paradigm for model validation. In: *Society for Experimental Mechanics, Inc, 16 th International Modal Analysis Conference*. Bd. 2, 1998, S. 1191–1198.
- [8] BANDEMER, Hans: *Mathematik und Ungewissheit: Drei Essays zu Problemen der Anwendung*. Ed. am Gutenbergplatz, 2005.
- [9] BARBER, C. B.; DOBKIN, D.P.; HUHDANPAA, H.T.: The Quickhull Algorithm for Convex Hulls. In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 22 (1996), December, Nr. 4, S. 469–483.

- 
- [10] BRONSTEIN, I. N.; SEMENDJAJEW, K. A.; MUSIOL, G.; MÜHLIG, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, 2012. – ISBN 978-3-8171-2018-5.
- [11] CERAMTEC GMBH: *Monolithische Vielschichtaktoren Technische Daten*, [http://www.ceramtec.com/files/mf\\_mmas.pdf](http://www.ceramtec.com/files/mf_mmas.pdf). – Stand 02.2015.
- [12] CONRAD, D.; ZAGRAI, A.; MEISNER, D.: Influence of Sensor Statistics on Piezoelectric and Magnetoelastic Damage Detection. In: *Proceedings of the ASME 2012 Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems, SMASIS2012, September 19-21, 2012, Stone Mountain, Georgia, USA*, 2012.
- [13] DEMPSTER, A. P.: Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping. In: *Annal of Mathematics Statistics* 38 (1967), Nr. 2, S. 325–329.
- [14] DIN EN ISO 2768-1: *Allgemeintoleranzen; Toleranzen für Längen- und Winkelmaße ohne einzelne Toleranzeintragung*. DIN Deutsche Institut für Normung e.V., 1991.
- [15] DONDEERS, S.; FARKAS, L.; HACK, M.; AUWERAER, H. Van d.; D'IPPOLITO, R.; MOENS, D.; DESMET, W.: Assessment of uncertainty for structural and mechatronics engineering applications. In: *Applied Mechanics and Materials* 104 (2012), S. 145–159.
- [16] DONGES A., NOLL R.: *Lasermesstechnik: Grundlagen und Anwendungen*. Hüthing Buch Verlag, Heidelberg, 1993.
- [17] ELISHAKOFF, I.; ELISSEEFF, P.; GLEGG, Stewart A. L.: Nonprobabilistic, convex-theoretic modeling of scatter in material properties. In: *AIAA journal* 32 (1994), Nr. 4, S. 843–849.
- [18] ELISHAKOFF, Isaac: Possible limitations of probabilistic methods in engineering. In: *Applied Mechanics Reviews* 53 (2000), Nr. 2, S. 19–36.
- [19] ELISHAKOFF, Isaac: *Probabilistic theory of structures*. Courier Corporation, 2012.
- [20] ENSS, G. C.: *Regelung der Stabilität einer adaptronischen lasttragenden Struktur*, Technische Universität Darmstadt, Fachgebiet Fluid System Technik FST, Masterarbeit, 2009.

- 
- [21] ENSS, G. C.: *Beherrschung von Unsicherheit am Beispiel eines aktiv gegen Knicken stabilisierten Systems*, Fachbereich Maschinenbau der Technischen Universität Darmstadt, Dissertation, 2016.
- [22] ENSS, G. C.; PLATZ, R.; HANSELKA, H.: An approach to control the stability in an active load-carrying beam-column by one single piezoelectric stack actuator. In: *Proc. of ISMA2010, Intern. Conf. on Noise and Vibration Engineering*, S, 2010, S. 535–546.
- [23] ENSS, G. C.; PLATZ, R.; HANSELKA, H.: Uncertainty in loading and control of an active column critical to buckling. In: *Shock and Vibration* 19 (2012), Nr. 5, S. 929–937.
- [24] ENSS, Georg C.; PLATZ, Roland; HANSELKA, Holger: A survey on uncertainty in the control of an active column critical to buckling. In: *Proceedings of ICEDyn 2011 International Conference on Structural Engineering Dynamics*. Tavira/Portugal, June 20-22 2011, S. 1–8.
- [25] FISHMAN, George: *Monte Carlo: concepts, algorithms, and applications*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [26] GE, P.; JOUANEH, M.: Generalized Preisach model for hysteresis nonlinearity of piezoceramic actuators. In: *Precision Engineering* 20 (1997), Nr. 2, S. 99–111.
- [27] GOLDFARB, M.; CELANOVIC, N.: Modeling piezoelectric stack actuators for control of micromanipulation. In: *Control Systems, IEEE* 17 (1997), Nr. 3, S. 69–79.
- [28] GROTE, K.-H. (Hrsg.); FELDHUSEN, J. (Hrsg.): *Dubbel Taschenbuch für den Maschinenbau 23. Auflage*. Springer, 2011.
- [29] GURAV, S. P.; GOOSEN, J. F. L.; VANKEULEN, F.: Bounded-But-Unknown uncertainty optimization using design sensitivities and parallel computing: Application to MEMS. In: *Computers & structures* 83 (2005), Nr. 14, S. 1134–1149.
- [30] GURAV, S. P.; KASYAP, A.; SHEPLAK, M.; CATTAFESTA, L.; HAFTKA, R. T.; GOOSEN, J. F. L.; VAN KEULEN, F.: Uncertainty-based design optimization of a micro piezoelectric composite energy reclamation device. In: *Proc. 10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conf*, 2004, S. 3559–70.

- 
- [31] HAGOOD, N. W.; CHUNG, W. H.; FLOTOW, A. von: Modelling of piezoelectric actuator dynamics for active structural control. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 1 (1990), Nr. 3, S. 327–354.
- [32] HAN, Soong O.: *Varianzbasierte Sensitivitätsanalyse als Beitrag zur Bewertung der Zuverlässigkeit adaptronischer Struktursysteme*, Fachbereich Maschinenbau der Technischen Universität Darmstadt, Dissertation, Mai 2011.
- [33] HANSELKA, H.; PLATZ, R.: Ansätze und Maßnahmen zur Beherrschung von Unsicherheit in lasttragenden Systemen des Maschinenbaus. In: *VDI-Zeitschrift Konstruktion* (2010), November, S. 55–62.
- [34] HANSELKA, Holger (Hrsg.): *Beherrschung von Unsicherheit in lasttragenden Systemen des Maschinenbaus; Antrag für die Einrichtung des Sonderforschungsbereichs 805; Teil 1 und 2*. 2008.
- [35] HANSELKA, Holger (Hrsg.): *Beherrschung von Unsicherheit in lasttragenden Systemen des Maschinenbaus; Antrag auf Finanzierung der zweiten Förderperiode des Sonderforschungsbereichs 805*. 2012.
- [36] HEGEWALD, T.: *Modellierung des nichtlinearen Verhaltens piezokeramischer Aktoren*, Universität Erlangen-Nürnberg, Technische Fakultät, Dissertation, 2007.
- [37] HEINRICH, J.: *Modellierung und Simulation piezoelektrischer Aktoren als Grundlage zur Entwicklung alternativer Steuer- und Regelprinzipien*, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Dissertation, 1999.
- [38] HEINSTEN, F. L. S.; TRINDADE, M. A.: Performance of Active and Passive Vibration Control using Piezoelectric Material Subjected to Uncertainties on Electrical and Material Properties. In: *Proceedings of the 1st International Symposium on Uncertainty Quantification and Stochastic Modeling, February 26th to March 2nd, Maresias, São Sebastião, SP, Brasil*, 2012, S. 272–283.
- [39] HELTON, J. C.; JOHNSON, J. D.; OBERKAMPF, W. L.: An exploration of alternative approaches to the representation of uncertainty in model predictions. In: *Reliability Engineering & System Safety* 85 (2004), Nr. 1, S. 39–71.
- [40] HEYWANG, W. (Hrsg.); LUBITZ, K. (Hrsg.); WERSING, W. (Hrsg.): *Piezoelectricity, Evolution and Future of a Technology*. Springer Series in Materials Science 14, 2008.

- 
- [41] ISLAM, M.; SEETHALER, R.; MUMFORD, D.: Real time temperature measurement for multilayered piezoelectric stack actuators. In: *Electrical and Computer Engineering (CCECE), 2011 24th Canadian Conference on*, 2011. – ISSN 0840–7789, S. 001194–001197.
- [42] JCGM 100: *Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement*. Paris : BIPM Bureau International des Poids et Mesures, 2008.
- [43] JENDRITZA, Daniel J. (Hrsg.): *Technischer Einsatz Neuer Aktoren, Grundlagen, Werkstoffe, Designregeln und Anwendungsbeispiele*, 3. voll. neu bearb. Aufl. Expert-Verlag, 2012. – ISBN 9783 816927655.
- [44] KAMADA, T.; FUJITA, T.; HATAYAMA, T.; ARIKABE, T.; MURAI, N.; AIZAWA, S.; TOHYAMA, K.: Active vibration control of frame structures with smart structures using piezoelectric actuators (Vibration control by control of bending moments of columns). In: *Smart Materials and Structures* 6 (1997), Nr. 4, S. 448.
- [45] KÖHLER, Robert: *Phänomenologische Modellierung des temperaturabhängigen Verhaltens piezoelektrischer Stapelaktoren*, Fachbereich Maschinenbau der Technischen Universität Darmstadt, Dissertation, 2013.
- [46] KOKKOLARAS, M.; MOURELATOS, Z. P.; PAPALAMBROS, P. Y.: Impact of uncertainty quantification on design: an engine optimisation case study. In: *International Journal of Reliability and Safety* 1 (2006), Nr. 1, S. 225–237.
- [47] KOYLUOGLU, H. U.; ELISHAKOFF, I.: A comparison of stochastic and interval finite elements applied to shear frames with uncertain stiffness properties. In: *Computers & structures* 67 (1998), Nr. 1-3, S. 91–98.
- [48] KRÄMER, Erwin: *Maschinendynamik*. Springer, 1984. – ISBN 9780387125411.
- [49] KUEHNEN, K.: *Inverse Steuerung piezoelektrischer Aktoren mit Hysterese-, Kriech- und Superpositionsooperatoren*, Universität des Saarlandes, Fakultät 7 - Physik und Elektrotechnik, Dissertation, 2001.
- [50] LEO, D. J.: *Engineering Analysis of Smart Material Systems*. John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- [51] LI, Mingfeng; LIM, Teik C.; JR, W Steve S.; GUAN, Y H.: Experimental active vibration control of gear mesh harmonics in a power recirculation gearbox



- 
- system using a piezoelectric stack actuator. In: *Smart Materials and Structures* 14 (2005), Nr. 5, 917. <http://stacks.iop.org/0964-1726/14/i=5/a=028>.
- [52] LOMBARDI, M.; HAFTKA, R. T.: Anti-optimization technique for structural design under load uncertainties. In: *Computer methods in applied mechanics and engineering* 157 (1998), Nr. 1, S. 19–31.
- [53] MAIN, John A.; GARCIA, Ephraim: Piezoelectric stack actuators and control system design: strategies and pitfalls. In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 20 (1997), Nr. 3, S. 479–485.
- [54] MARATHE, S. S.; WANG, K. W.; GANDHI, E.: Feedback linearization control of magnetorheological fluid damper based systems with model uncertainty. In: *Smart Materials and Structures* 13 (2004), Nr. 5, S. 1006.
- [55] MATLAB: *version 7.10.0 (R2010a)*. Natick, Massachusetts : The MathWorks Inc., 2010.
- [56] MCKAY, M. D.; BECKMAN, R. J.; CONOVER, W. J.: A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code. In: *Technometrics* 21 (1979), Nr. 2, S. 239 – 245.
- [57] MEYNA, A.; PAULI, B.: *Taschenbuch der Zuverlässigkeitstechnik, Quantitative Bewertungsverfahren, 2. überarbeitete und erweiterte Auflage*. Hanser-Verlag München, 2010 (Praxisreihe Qualitätswissen).
- [58] MICRO-EPSILON MESSTECHNIK GMBH & CO. KG: *Micro-Epsilon Instruction Manual optoNCDT 22xx*, <http://www.micro-epsilon.com/download/manuals/man--optoNCDT-2200--en.pdf>. – Stand 03.2011.
- [59] MITROVIC, M.; CARMAN, G. P.; STRAUB, F. K.: Durability properties of piezoelectric stack actuators under combined electromechanical loading. In: *SPIE's 7th Annual International Symposium on Smart Structures and Materials* International Society for Optics and Photonics, 2000, S. 217–232.
- [60] MITROVIC, Milan; CARMAN, Greg P; STRAUB, Friedrich K.: Response of piezoelectric stack actuators under combined electro-mechanical loading. In: *International journal of solids and structures* 38 (2001), Nr. 24, S. 4357–4374.
- [61] MOENS, David: *A Non-Probabilistic Finite Element Approach for Structural Dynamic Analysis with Uncertain Parameters*, KU Leuven, Department of Mechanical Engineering, PhD Thesis, 2002.

- 
- [62] MONTERO, W.; FARAG, R.; DÍAZ, V.; RAMIREZ, M.; BOADA, B. L.: Uncertainties associated with strain-measuring systems using resistance strain gauges. In: *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 46 (2011), Nr. 1, S. 1–13.
- [63] MONTGOMERY, D. C.; PECK, E. A.; VINING, G. G.: *Introduction to Linear Regression Analysis, third Edition*. John Wiley & Sons, Inc., 2012 (Wiley Series in Probability and Statistics).
- [64] OBERKAMPF, W. L.; DELAND, S. M.; RUTHERFORD, B. M.; DIEGERT, K. V.; ALVIN, K. F.: A new methodology for the estimation of total uncertainty in computational simulation. In: *AIAA Non-Deterministic Approaches Forum*, St. Louis, MO, Paper, 1999.
- [65] OBERKAMPF, W. L.; DELAND, S. M.; RUTHERFORD, B. M.; DIEGERT, K. V.; ALVIN, K. F.: Error and uncertainty in modeling and simulation. In: *Reliability Engineering & System Safety* 75 (2002), Nr. 3, S. 333–357.
- [66] OEHLER, S. D.; HARTL, D. J.; LOPEZ, R.; MALAK, R. J.; LAGODAS, D. C.: Design optimization and uncertainty analysis of SMA morphing structures. In: *Smart Materials and Structures* 21 (2012), Nr. 9, S. 094016.
- [67] OLSSON, A.; SANDBERG, G.; DAHLBLOM, O.: On Latin hypercube sampling for structural reliability analysis. In: *Structural Safety* 25 (2003), Nr. 1, S. 47 – 68.
- [68] ONDOUA, S.; PLATZ, R.; HANSELKA, H.: A study on scatter in piezoelectric stackactuator characteristics as an uncertainty criterion in usage process of a load-carrying system. In: *Proceedings of International Conference on Structural Engineering Dynamics ICEDyn 2011*. Tavira/Portugal, June 20-22 2011.
- [69] ONDOUA, S.; PLATZ, R.; HANSELKA, H.: Unsicherheit im Arbeitsdiagramm eines piezoelektrischen Aktuators für die aktive Stabilisierung von Stäben. In: *26. Fachtagung Technische Zuverlässigkeit TTZ 2013, Entwicklung und Betrieb zuverlässiger Produkte* Bd. VDI-Berichte Nr. 2210. Leonberg/Germany, Apr. 23-24 2013, S. 261–270.
- [70] ONDOUA, S.; PLATZ, R.; NUFFER, J.; HANSELKA, H.: Uncertainties in Active Stabilization of Buckling Columns by Means of Piezoelectric Materials. In: *Proceedings of ICAST 2010 21st International Conference on Adaptive Structures and Technologies*. State College, PA/USA, Oct. 4-6 2010.

- 
- [71] ONDOUA, S.; PLATZ, R.; NUFFER, J.; HANSELKA, H.: A study of uncertainties in active load carrying systems due to scatter in specifications of piezoelectric actuators. In: *Proceedings of ESREL: Advances in Safety, Reliability and Risk Management*. Troyes/France, Sep. 19-23 2011, S. 2114–2120.
- [72] PAXTON, Pamela; CURRAN, Patrick J.; BOLLEN, Kenneth A.; KIRBY, Jim; CHEN, Feinian: Monte Carlo experiments: Design and implementation. In: *Structural Equation Modeling* 8 (2001), Nr. 2, S. 287–312.
- [73] PELLISSETTI, M. F.; SCHUËLLER, G. I.: The effects of uncertainties in structural analysis. In: *Structural Engineering and Mechanics* 25 (2007), Nr. 3, S. 311–330.
- [74] PHYSIK INSTRUMENTE (PI) GMBH & CO. KG: *PI, Piezo Nano Positioning, 2013/2014*. Auf der Römerstrasse 1, D-76228 Karlsruhe, 2013/2014.
- [75] PIAZZI, A.; VISIOLI, A.: Global minimum-jerk trajectory planning of robot manipulators. In: *Industrial Electronics, IEEE Transactions on* 47 (2000), Nr. 1, S. 140–149.
- [76] PICKELMANN, Lutz: *Piezo-mechanical and electrostrictive Stack and ring actuators: Productrange and technical data*. Berg-am-Laim-Str. 64, D-81673 München: Piezomechanik GmbH, Okt. 2006.
- [77] PICKELMANN, Lutz: *Piezomechanik GmbH First Step towards Piezoaction*. Berg-am-Laim-Straße 64, D-81673 München: Piezomechanik – Dr. Lutz Pickelmann GmbH, April 2010.
- [78] PLATZ, R.; ENSS, G. C.; ONDOUA, S.; MELZ, T.: Active stabilization of a slender beam-column under static axial loading and estimated uncertainty in actuator properties. In: *Proceedings of the Second International Conference on Vulnerability and Risk Analysis and Management (ICVRAM) and the Sixth International Symposium on Uncertainty Modeling and Analysis (ISUMA)*. Liverpool, UK, Jul 13-16 2014, S. 235–244.
- [79] PLATZ, Roland; ONDOUA, Serge; ENSS, Georg C.; MELZ, Tobias: Approach to Evaluate Uncertainty in Passive and Active Vibration Reduction. In: ATAMTURK, H. S. (Hrsg.); MOAVENI, Babak (Hrsg.); PAPADIMITRIOU, Costas (Hrsg.); SCHOENHERR, Tyler (Hrsg.): *Model Validation and Uncertainty Quantification, Volume 3: Proceedings of the 32nd IMAC, A Conference and Exposition on Structural Dynamics*. Springer International Publishing, 2014 (Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series), S. 345–352.

- 
- [80] POMIRLEANU, R.; GIURGIUTIU, V.: Full-stroke static and dynamic analysis of high-power piezoelectric actuators. In: *Journal of intelligent material systems and structures* 13 (2002), Nr. 5, S. 275–289.
- [81] PREUMONT, A.: *Mechatronics Dynamics of Electromechanical and Piezoelectric Systems*. Springer, 2006.
- [82] RADE, P. und Westergren B. L. und Vachenauer V. L. und Vachenauer: *Springers mathematische Formeln: Taschenbuch für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Informatiker, Wirtschaftswissenschaftler*. Springer Berlin Heidelberg, 2000. – ISBN 9783540675051.
- [83] ROBERT, Christian P.; CASELLA, George: *Monte Carlo Statistical Methods (Springer Texts in Statistics)*. Secaucus, NJ, USA : Springer-Verlag New York, Inc., 2005. – ISBN 0387212396.
- [84] ROSIEK, M.; MARTOWICZ, A.; UHL, T.: Uncertainty and sensitivity analysis of electro-mechanical impedance based SHM system. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* 10 (2010), Nr. 1, S. 012207.
- [85] SCHWEIZER, Wolfgang: *MATLAB kompakt*. Oldenbourg Verlag, 2013.
- [86] SHAFER, Glenn: *A mathematical theory of evidence*. Bd. 1. Princeton university press Princeton, 1976.
- [87] SIMÕES, Ricardo C.; STEFFEN, Valder; DER HAGOPIAN, Johan; MAHFOUD, Jarir: Modal active vibration control of a rotor using piezoelectric stack actuators. In: *Journal of Vibration and Control* 13 (2007), Nr. 1, S. 45–64.
- [88] SMITH, Ralph C.: *Uncertainty Quantification: Theory, Implementation, and Applications*. Bd. 12. SIAM, 2013.
- [89] SONG, G.; VLATTAS, J.; JOHNSON, SE.; AGRAWAL, BN.: Active vibration control of a space truss using a lead zirconate titanate stack actuator. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering* 215 (2001), Nr. 6, S. 355–361.
- [90] TSOMPANAKIS, Yannis; LAGAROS, Nikos D.; PAPADRAKAKIS, Manolis: *Structural Design Optimization Considering Uncertainties: Structures & Infrastructures Book, Vol. 1, Series, Series Editor: Dan M. Frangopol*. CRC Press, 2008.

- 
- [91] UMESH, K.; GANGULI, R.: Composite material and piezoelectric coefficient uncertainty effects on structural health monitoring using feedback control gains as damage indicators. In: *Structural Health Monitoring* 10 (2011), Nr. 2, S. 115–129.
- [92] WANG, D. H.; ZHU, W.: A phenomenological model for pre-stressed piezoelectric ceramic stack actuators. In: *Smart Materials and Structures* 20 (2011), Nr. 3, S. 035018.
- [93] WANG, Q.: *Piezoaktoren für Anwendungen im Kraftfahrzeug, Messtechnik und Modellierung*, Ruhr Universität Bochum, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Dissertation, 2006.
- [94] WANG, Q.; QUEK, S. T.: Enhancing flutter and buckling capacity of column by piezoelectric layers. In: *International Journal of Solids and Structures* 39 (2002), Nr. 16, S. 4167 – 4180. – ISSN 0020–7683.
- [95] WEBBER, K. G.; AULBACH, E.; RÖDEL, J.: High temperature blocking force measurements of soft lead zirconate titanate. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 43 (2010), Nr. 36, S. 365401.
- [96] ZADEH, L. A.: Fuzzy sets. In: *Information and control* 8 (1965), Nr. 3, S. 338–353.
- [97] ZANG, T.; HEMSCH, M. J.; HILLBURGER, M. W.; KENNY, S. P.; LUCKRING, J. M.; MAGHAMI, P.; PADULA, S. L.; STROUD, W. J.: Needs and Opportunities for Uncertainty-Based Multidisciplinary Design Methods for Aerospace Vehicles / NASA, Langley Research Center, Hampton, Virginia. 2002 (NASA/TM-2002-211462). – Forschungsbericht.
- [98] ZHENG, Kai; YAN, Shao-ze; WEN, Shi-zhu; YE, Qing: Influence of Preload on the Properties for Piezoelectric Stack Actuator [J]. In: *Piezoelectrics & Acoustooptics* 5 (2003), S. 004.

---

# Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

## Abkürzungen

|       |                                      |
|-------|--------------------------------------|
| Ampl. | Amplitude                            |
| bzw.  | beziehungsweise                      |
| DIN   | Deutsches Institut für Normung       |
| DMS   | Dehnmessstreifen                     |
| Freq. | Frequenz                             |
| GUM   | Guide for Uncertainty in Measurement |
| max.  | maximal                              |
| MCS   | Monte Carlo-Simulationen             |
| SFB   | Sonderforschungsbereich              |
| u. a. | unter anderem                        |
| vgl.  | vergleiche                           |
| z. B. | zum Beispiel                         |
| z. T. | zum Teil                             |

## Griechische Symbole

|                     |  |
|---------------------|--|
| $\alpha$            | Quantil einer Verteilungsfunktion in %   |
| $\beta_0$           | Koeffizient der Regressionsfunktion $g_{\Delta z}(\hat{U}, K)$ in $\mu\text{m}$              |
| $\beta_1$           | Koeffizient der Regressionsfunktion $g_{\Delta z}(\hat{U}, K)$ in $\mu\text{m}/\text{V}$     |
| $\beta_2$           | Koeffizient der Regressionsfunktion $g_{\Delta z}(\hat{U}, K)$ in $\mu\text{m}/\text{V}^2$   |
| $\beta_3$           | Koeffizient der Regressionsfunktion $g_{\Delta z}(\hat{U}, K)$ in $\mu\text{m}^2/\text{N}$   |
| $\beta_4$           | Koeffizient der Regressionsfunktion $g_{\Delta z}(\hat{U}, K)$ in $\mu\text{m}^3/\text{N}^2$ |
| $\beta_5$           | Koeffizient der Regressionsfunktion $g_{\Delta z}(\hat{U}, K)$ in $\mu\text{m}^2/\text{VN}$  |
| $\beta$             | Vektor mit den Koeffizienten der Regressionsfunktion $g_{\Delta z}(\hat{U}, K)$              |
| $\delta \Delta z_a$ | Vektor der Abweichungen $\delta \Delta z_a$  |
| $\tilde{z}_a$       | angepasster Stellweg eines Stapelaktuators in $\mu\text{m}$                                  |

---

|                         |   |
|-------------------------|---|
| $\Delta z$              | Stellweg in $\mu\text{m}$   |
| $\Delta z_a$            | numerischer Stellweg eines Stapelaktuators in $\mu\text{m}$                       |
| $\Delta z_a(t)$         | zeitlicher Verlauf des Stellwegs eines Stapelaktuators in $\mu\text{m}$           |
| $\Delta z_{\text{max}}$ | maximaler freier Stellweg des Stapelaktuators in $\mu\text{m}$                    |
| $\Delta z_v$            | initiale mechanische Verschiebung des Stapelaktuators in $\mu\text{m}$            |
| $\delta \Delta z_a$     | Abweichung zwischen den numerischen und gemessenen Stellwegen in $\mu\text{m}$    |
| $\eta$                  | Vektor mit den Koeffizienten der Regressionsfunktion $g_F(\hat{U}, K)$            |
| $\eta_0$                | Koeffizient der Regressionsfunktion $g_F(\hat{U}, K)$ in N                        |
| $\eta_1$                | Koeffizient der Regressionsfunktion $g_F(\hat{U}, K)$ in N/V                      |
| $\eta_2$                | Koeffizient der Regressionsfunktion $g_F(\hat{U}, K)$ in N/V <sup>2</sup>         |
| $\eta_3$                | Koeffizient der Regressionsfunktion $g_F(\hat{U}, K)$ in $\mu\text{m}$            |
| $\eta_4$                | Koeffizient der Regressionsfunktion $g_F(\hat{U}, K)$ in $\mu\text{m}^2/\text{N}$ |
| $\eta_5$                | Koeffizient der Regressionsfunktion $g_F(\hat{U}, K)$ in $\mu\text{m}/\text{V}$   |
| $\delta F_a$            | Vektor der Abweichungen $\delta F_a$  |
| $\delta F_a$            | Abweichung zwischen den numerischen und gemessenen Stellkräften in N              |
| $\sigma_{\square}$      | Standardabweichung einer Eigenschaft $\square$                                    |
| $\Theta$                | Matrix zur Berechnung der Regressionskoeffizienten                                |
| $\nu$                   | Dichtefunktion einer Verteilungsfunktion $V$                                      |
| $\zeta$                 | Integrationsveränderliche   |

## Indizes

|                            |   |
|----------------------------|---|
| $\bar{\square}$            | arithmetischer Mittelwert der Eigenschaft $\square$             |
| $\underset{\sim}{\square}$ | Kleinstwert der Eigenschaft $\square$                           |
| $\hat{\square}$            | Höchstwert der Eigenschaft $\square$                            |
| $i$                        | Laufindex der Abweichungen $\delta F_a$ und $\delta \Delta z_a$ |
| $k$                        | Laufindex der Eckpunkte einer Unsicherheitsregion $\mathbb{U}$  |
| $m$                        | Laufindex der Spannungsamplituden $\hat{U}$                     |
| $n$                        | Laufindex der simulierten Balken                                |
| $r$                        | Laufindex der untersuchten Stapelaktuatoren                     |
| $\square^e$                | experimenteller bzw. gemessener Wert der Eigenschaft $\square$  |

---

## Lateinische Symbole

|                  |  |
|------------------|--|
| $b$              | Breite des Balkens in mm   |
| $c$              | Halbachse einer elliptischen Unsicherheitsregion                               |
| $d$              | Halbachse einer elliptischen Unsicherheitsregion                               |
| $E$              | Elastizitätsmodul des Balkenswerkstoffs in $\text{N/mm}^2$                     |
| $\mathbb{E}$     | elliptische Unsicherheitsregion  |
| $E_H$            | horizontale Auflagerreaktion in der Einspannung des Balkens in N               |
| $E_m$            | mechanische Energie in $\text{N}\mu\text{m}$                                   |
| $F$              | Kraft in N   |
| $f$              | Frequenz der elektrischen Betriebsspannung $U(t)$ in Hz                        |
| $\tilde{F}_a$    | angepasste Stellkraft eines Stapelaktuators in N                               |
| $F_a$            | numerische Stellkraft eines Stapelaktuators in N                               |
| $F_a(t)$         | zeitlicher Verlauf der Stellkraft eines Stapelaktuators in N                   |
| $F_B$            | Blockierkraft eines Stapelaktuators in N                                       |
| $F_{\text{st}}$  | Störkraft in N   |
| $F_v$            | mechanische Vorspannkraft in N   |
| $G_{\mathbb{J}}$ | Gleichverteilung einer Eigenschaft $\mathbb{J}$                                |
| $G_F$            | Funktion der Abweichungen in den Stellkräften in N                             |
| $g_F$            | Regressionsfunktion für $\delta F_a$ in N                                      |
| $G_{\Delta z}$   | Funktion der Abweichungen in den Stellwegen in $\mu\text{m}$                   |
| $g_{\Delta z}$   | Regressionsfunktion für $\delta \Delta z_a$ in $\mu\text{m}$                   |
| $H$              | Häufigkeit   |
| $h$              | Dicke des Balkens in mm  |
| $I_y$            | Flächenträgheitsmoment 2. Grades in $\text{mm}^4$                              |
| $K$              | Balkensteifigkeit in $\text{N}/\mu\text{m}$                                    |
| $l$              | Länge des Balkens in mm  |
| $M$              | Anzahl der Abweichungen $\delta F_a$ und $\delta \Delta z_a$ pro Vorspannkraft |
| $M_E$            | Biegemoment in der Einspannung des Balkens in Nm                               |
| $M_y$            | Biegemoment in $y$ -Richtung in Nm   |
| $N$              | Anzahl der numerischen Aktuator- und Balkeneigenschaftswerte                   |
| $N_{\mathbb{J}}$ | Normalverteilung einer Eigenschaft $\mathbb{J}$                                |



---

|                 |   |
|-----------------|---|
| $P$             | Wahrscheinlichkeit  |
| $Q_z$           | Querkraft in $z$ -Richtung in N   |
| $R^2$           | Bestimmtheitsmaß einer Regressionsfunktion                                    |
| $S$             | Eckpunkt einer Unsicherheitsregion $(F_k; \Delta z_k)$ in (N, $\mu\text{m}$ ) |
| $U$             | konstanter Wert der elektrischen Betriebsspannung in V                        |
| $\mathbb{U}$    | Unsicherheitsregion um einen nominalen Arbeitspunkt in $\text{N}\mu\text{m}$  |
| $\hat{U}$       | Spannungsamplitude der elektrischen Betriebsspannung $U(t)$ in V              |
| $U(t)$          | zeitlicher Verlauf der elektrischen Betriebsspannung in V                     |
| $U_{\max}$      | maximale zulässige elektrische Betriebsspannung in V                          |
| $V(X)$          | Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable $X$                                 |
| $w$             | Durchbiegung des Balkens in mm  |
| $w_a$           | Durchbiegung des Balkens aufgrund der aktiven Kraft $F_a$ in mm               |
| $w_{\text{st}}$ | Durchbiegung des Balkens aufgrund der Störkraft $F_{\text{st}}$ in mm         |
| $X$             | Zufallsvariable   |
| $x_s$           | Lage der Dehnungsmessstreifen auf dem Balken in mm                            |
| $x_a$           | Angriffspunkt der aktiven Kraft $F_a$ auf dem Balken in mm                    |
| $x_{\text{st}}$ | Angriffspunkt der Störkraft $F_{\text{st}}$ auf dem Balken in mm              |

---

# Abbildungsverzeichnis

|      |   |    |
|------|---|----|
| 2.1  | Aufbau eines piezoelektrischen Stapelaktuators . . . . .                              | 10 |
| 2.2  | Arbeitsdiagramm eines piezoelektrischen Stapelaktuators . . . . .                     | 11 |
| 2.3  | Das aktive Balkensystem . . . . .   | 15 |
| 2.4  | Verbindung zwischen dem Stapelaktuator und dem Balken . . . . .                       | 15 |
| 2.5  | Elektrische Betriebsspannung des Stapelaktuators . . . . .                            | 17 |
| 2.6  | Arbeitsdiagramm des Stapelaktuators im aktiven Balkensystem . . . . .                 | 17 |
| 2.7  | Das untersuchte aktive System . . . . .   | 19 |
| 2.8  | Arbeitsdiagramm des Stapelaktuators im aktiven System . . . . .                       | 19 |
| 2.9  | Schnittgrößen und Auflagerreaktionen im Balken . . . . .                              | 21 |
| 3.1  | Unsicherheitsmodell des SFB 805 . . . . .   | 25 |
| 4.1  | Deterministisches Arbeitsdiagramm des Stapelaktuators . . . . .                       | 33 |
| 4.2  | Grenzen der Kraft-Weg-Kennlinien im Arbeitsdiagramm . . . . .                         | 35 |
| 4.3  | Beispiel einer Unsicherheitsregion im Arbeitsdiagramm . . . . .                       | 37 |
| 4.4  | Arbeitsdiagramm aus den Worst-Case Analysen . . . . .                                 | 39 |
| 4.5  | Verläufe der Unsicherheitsregionen . . . . .  | 41 |
| 4.6  | Variationen der Unsicherheitsregionen . . . . .                                       | 42 |
| 4.7  | Elliptische Unsicherheitsregionen . . . . .   | 43 |
| 4.8  | Beispiel einer Ellipse mit der Inhaltsfläche $\mathbb{E}$ . . . . .                   | 44 |
| 4.9  | Histogramme der normalverteilten Eigenschaften . . . . .                              | 47 |
| 4.10 | Histogramme der gleichverteilten Eigenschaften . . . . .                              | 48 |
| 4.11 | Häufigkeitsverteilungen der Stellkräfte und -wege im Fall 1 . . . . .                 | 54 |
| 4.12 | Häufigkeitsverteilungen der Stellkräfte und -wege im Fall 14 . . . . .                | 54 |
| 4.13 | Arbeitsdiagramme aus den Monte Carlo-Simulationen . . . . .                           | 55 |
| 5.1  | Aufbau des experimentellen aktiven Systems . . . . .                                  | 59 |
| 5.2  | Prinzipielle Darstellung des experimentellen aktiven Systems . . . . .                | 60 |
| 5.3  | Einspannvorrichtung des experimentellen aktiven Systems . . . . .                     | 60 |
| 5.4  | Hysterese-Verläufe der gemessenen Stellkraft und -weg . . . . .                       | 64 |
| 5.5  | Experimentelle Arbeitsdiagramme . . . . .   | 68 |
| 5.6  | Nominale und experimentelle Arbeitspunkte . . . . .                                   | 77 |
| 5.7  | Vergleich der numerischen und gemessenen Stellkräfte . . . . .                        | 79 |
| 5.8  | Vergleich der numerischen und gemessenen Stellwege . . . . .                          | 80 |
| 5.9  | Experimentelle Unsicherheitsregionen bei der Frequenz $f_1 = 1 \text{ Hz}$ . . . . .  | 82 |
| 5.10 | Experimentelle Unsicherheitsregionen bei der Frequenz $f_2 = 27 \text{ Hz}$ . . . . . | 83 |

---

|      |  |    |
|------|--|----|
| 5.11 | Verläufe der experimentellen Unsicherheitsregionen . . . . .         | 85 |
| 6.1  | Regressionsfunktionen der Abweichungen in den Stellkräften . . . . . | 93 |
| 6.2  | Regressionsfunktionen der Abweichungen in den Stellwegen . . . . .   | 94 |
| 6.3  | Arbeitsdiagramme mit den angepassten Arbeitspunkten . . . . .        | 95 |

---

# Tabellenverzeichnis

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 4.1 | Angenommene Streuungen der Aktuator- und Balkeneigenschaften .          | 30 |
| 4.2 | Grenzwerte der streuenden Aktuator- und Balkeneigenschaften . . .       | 32 |
| 4.3 | Numerische Ergebnisse der Worst-Case Analysen . . . . .                 | 40 |
| 4.4 | Kombinationsfälle der Monte Carlo-Simulationen . . . . .                | 49 |
| 4.5 | Ergebnisse der Monte Carlo-Simulationen für die Balkensteifigkeit $K_1$ | 50 |
| 4.6 | Ergebnisse der Monte Carlo-Simulationen für die Balkensteifigkeit $K_2$ | 51 |
| 4.7 | Ergebnisse der Monte Carlo-Simulationen für die Balkensteifigkeit $K_3$ | 52 |
| 5.1 | Auflistung der Geräte im experimentellen aktiven System . . . . .       | 61 |
| 5.2 | Gemessene Stellkräfte und -wege bei quasistatischer Ansteuerung . .     | 66 |
| 5.3 | Gemessene Stellkräfte und -wege bei dynamischer Ansteuerung . . .       | 67 |
| 5.4 | Experimentelle Balkensteifigkeiten . . . . .                            | 69 |
| 5.5 | Gemessene Aktuator- und Balkeneigenschaften . . . . .                   | 70 |
| 5.6 | Gemessene Blockierkräfte und maximale freie Stellwege . . . . .         | 71 |
| 5.7 | Gemessene Stellkräfte und -wege des Stapelaktuators Nr.1 . . . . .      | 74 |
| 5.8 | Gemessene Stellkräfte und -wege des Stapelaktuators Nr.6 . . . . .      | 75 |
| 5.9 | Experimentelle und numerische Unsicherheitsregionen . . . . .           | 85 |
| 6.1 | Koeffizienten und Bestimmtheitsmaße der Regressionsfunktionen . .       | 92 |
| 6.2 | numerisch angepasste Stellkräfte und -wege . . . . .                    | 96 |
| 6.3 | Abweichungen nach der Modellanpassung . . . . .                         | 97 |

---

# Danksagung

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Systemzuverlässigkeit und Maschinenakustik SzM der TU Darmstadt von Juli 2009 bis Juni 2014.

Ich bedanke mich bei Herrn Prof. Tobias Melz für die Möglichkeit zur Promotion und die Übernahme des ersten Gutachtens dieser Arbeit.

Ich bedanke mich auch bei Herrn Prof. Stefan Rinderknecht für die Übernahme des zweiten Gutachtens dieser Arbeit.

Mein spezieller Dank geht an Herrn Dr. Roland Platz für seine Anmerkungen, Anregungen und Ratschläge bei der Erstellung dieser Arbeit.

Ich möchte mich auch bei meinen ehemaligen Kollegen am SzM und am Fraunhofer-Institut für Betriebsfestigkeit und Systemzuverlässigkeit LBF für ihre Hilfe und die kollegiale Arbeitsatmosphäre bedanken.

Darüber hinaus danke ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) für die Finanzierung des Sonderforschungsbereichs SFB 805, in dessen Rahmen diese Forschungsarbeit stattgefunden hat.

Diese Arbeit ist meinen Eltern gewidmet.

---